λ-Tipi sul λ-Calcolo con Abbreviazioni: una Specifica Certificata

Ferruccio Guidi
fguidi@cs.unibo.it

16 dicembre 2005

$\lambda\delta$

Caratteristiche

Termini e tipi usano gli stessi costruttori
No Π: è solo un costruttore di tipi
(oppure Π anche sui termini ?)

C'è una sequenza infinita di sorte
(non solo $\star$ e $\square$ come in λC) ma non sono
universi come nel Calcolo delle Costruzioni

I contesti sono termini (ma non viceversa)

Ha le proprietà standard di un λ-calcolo tipato

Nessun termine tipato può essere ottenuto per
quantificazione universale sul tipo medesimo
(predicatività dei termini)

Un possibile uso

Fondazione per le teorie predicative dei tipi:
CTT (Martin-Löf) e MTT (Maietti e Sambin)

Costruttori

Sorta di indice k, riferimento alla variabile i-esima, astrazione alla Church, abbreviazione, cancellazione, applicazione, tipo esplicito

Termini (in notazione prefissa):

$$S_k \quad R_i \quad \lambda V.T \quad \delta V.T \quad \chi.T \quad (V).T \quad \langle V\rangle.T$$

Contesti (in notazione prefissa inversa): sono termini il cui elemento di coda non è un R_i

$$S_k \quad C.\lambda V \quad C.\delta V \quad C.\chi \quad C.(V) \quad C.\langle V\rangle$$

Immersione dei contesti nei termini:

$$S_k.\natural_1 V_1 \ldots \natural_h V_h \mapsto \natural_1 V_1 \ldots \natural_h V_h.S_k$$

Il simbolo $\flat$ indica λ, δ oppure χ

Passi di riduzione

β-contrazione: $(W).\lambda V.T \to_\beta \delta W.T$

δ-espansione: $\delta V.T \to_\delta \delta V.[0^+ \leftarrow V]T$

ζ-contrazioni: $\delta V.{}_0{\uparrow}^1 T \to_\zeta T$ e $\chi.{}_0{\uparrow}^1 T \to_\zeta T$
Non sono ammesse se il redex è un contesto

ϵ-contrazione: $\langle V\rangle.T \to_\epsilon T$

υ-conversioni:
$(W).\delta V.T \to_\upsilon \delta V.({}_0{\uparrow}^1 W).T$ e
$(W).\chi.T \to_\upsilon \chi.({}_0{\uparrow}^1 W).T$

δ-espansione contestuale:
se $\Downarrow^i C = D.\delta V$ allora $C \vdash T \to_\delta [i^+ \leftarrow V]T$

Assegnamento del tipo

$$g : G \equiv \{\mathsf{next} : \mathbb{N} \to \mathbb{N};\ \ next\_lt : h < \mathsf{next}(h)\}$$

$$\frac{}{C \vdash_g S_h : S_{\mathsf{next}_g(h)}}\ sort$$

$$\frac{\Downarrow^i C = D.\delta V \quad D \vdash_g V : T}{C \vdash_g R_i : {}_0\!\uparrow^{i+1} T}\ abbr$$

$$\frac{\Downarrow^i C = D.\lambda V \quad D \vdash_g V : T}{C \vdash_g R_i : {}_0\!\uparrow^{i+1} V}\ abst$$

$$\frac{C \vdash_g V : T \quad C.\flat V \vdash_g T_1 : T_2 \quad C.\flat V \vdash_g T_2 : T_0}{C \vdash_g \flat V.T_1 : \flat V.T_2}\ bind$$

$$\frac{C \vdash_g W : V \quad C \vdash_g U : \lambda V.T}{C \vdash_g (W).U : (W).\lambda V.T}\ appl$$

$$\frac{C \vdash_g T_1 : T_2 \quad C \vdash_g T_2 : T_0}{C \vdash_g \langle T_2 \rangle.T_1 : T_2}\ cast$$

$$\frac{C \vdash_g T_2 : T \quad C \vdash_g V : T_1 \quad C \vdash T_1 \Leftrightarrow^* T_2}{C \vdash_g V : T_2}\ conv$$

Assegnamento dell'arietà

$$l \in L \equiv \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid L \to L$$

$$\frac{}{C \vdash_g S_k \rhd (k, 0)}\ sort$$

$$\frac{\Downarrow^i C = D.\delta V \quad D \vdash_g V \rhd l}{C \vdash_g R_i \rhd l}\ abbr$$

$$\frac{\Downarrow^i C = D.\lambda V \quad D \vdash_g V \rhd l +_g 1}{C \vdash_g R_i \rhd l}\ abst$$

$$\frac{\flat \neq \lambda \quad C \vdash_g V \rhd l_1 \quad C.\flat V \vdash_g T \rhd l_2}{C \vdash_g \flat V.T \rhd l_2}\ bind$$

$$\frac{C \vdash_g V \rhd l_1 +_g 1 \quad C.\lambda V \vdash_g T \rhd l_2}{C \vdash_g \lambda V.T \rhd l_1 \to l_2}\ head$$

$$\frac{C \vdash_g V \rhd l_1 \quad C \vdash_g T \rhd l_1 \to l_2}{C \vdash_g (V).T \rhd l_2}\ appl$$

$$\frac{C \vdash_g V \rhd l +_g 1 \quad C \vdash_g T \rhd l}{C \vdash_g \langle V \rangle.T \rhd l}\ cast$$

Principali proprietà certificate

Se $C \vdash T_0 \Rightarrow^* T_1$ e $C \vdash T_0 \Rightarrow^* T_2$ allora esiste T
per cui $C \vdash T_1 \Rightarrow^* T$ e $C \vdash T_2 \Rightarrow^* T$

Se $C \vdash_g T_1 : T_2$ allora esiste T_3
per cui $C \vdash_g T_2 : T_3$

Se $C \vdash_g T : T_1$ e $C \vdash_g T : T_2$
allora $C \vdash T_1 \Leftrightarrow^* T_2$

Se $C \vdash T \Rightarrow^* T_1$ e $C \vdash_g T : T_2$
allora $C \vdash_g T_1 : T_2$

Se $C \vdash T_1 \Rightarrow^* T_2$ e $C \vdash_g T_1 \triangleright l$ allora $C \vdash_g T_2 \triangleright l$

Se $C \vdash_g T_1 : T_2$ allora esiste l per cui
$C \vdash_g T_1 \triangleright l$ e $C \vdash_g T_2 \triangleright l +_g 1$

In totale: alla data 15-12-2005

64 definizioni, 431 teoremi, 9600 righe di sorgenti in 14 mesi; proof assistant utilizzato: coq 7.3.1