λ-Tipi
sul λ-Calcolo con Abbreviazioni

Ferruccio Guidi

Dipartimento di Scienze dell'Informazione
Università di Bologna

fguidi@cs.unibo.it

30 gennaio 2007

Congettura di base

Esiste un λ-calcolo tipato in cui i termini, i tipi e i contesti usano gli stessi costrutti, e per cui valgono le proprietà desiderate standard

Il calcolo $\lambda\delta$

Termini e tipi condividono gli stessi costrutti

I contesti usano meno costrutti dei termini

C'è una sequenza infinita di sorte

Ha le proprietà desiderate standard

Assomiglia al λ-calcolo tipato semplice di Church

Un possibile uso

Fondazione per le teorie predicative dei tipi:
CTT (Martin-Löf) e MTT (Maietti e Sambin)

Parametro della gerarchia delle sorte

$$g \in G \equiv \{\mathsf{next} \in \mathbb{N} \to \mathbb{N};\ \mathit{next\_lt} \in h < \mathsf{next}(h)\}$$

Costrutti

Sorta di indice k, variabile,
astrazione alla Church, abbreviazione,
applicazione, tipo esplicito

Costruttori

Termini (in notazione prefissa)

$$\mathsf{Sort}_k \quad x \quad \lambda x{:}V.T \quad \delta x{\leftarrow}V.T \quad (V).T \quad \langle V\rangle.T$$

Contesti (in notazione prefissa)

$$\mathsf{Sort}_k \quad \lambda x{:}V.C \quad \delta x{\leftarrow}V.C \quad (V).C \quad \langle V\rangle.C$$

Passi di riduzione

β-contrazione

$$(W).\lambda x{:}V.T \quad \to_\beta \quad \delta x{\leftarrow}W.T$$

δ-espansione

$$\delta x{\leftarrow}V.T \quad \to_\delta \quad \delta x{\leftarrow}V.[x^+{\leftarrow}V]T$$

ζ-contrazione

$$\delta x{\leftarrow}V.T \quad \to_\zeta \quad T \quad \text{se } x \notin \mathsf{FV}(T)$$

(non è ammessa se il redex è un contesto)

ϵ-contrazione

$$\langle V\rangle.T \quad \to_\epsilon \quad T$$

υ-conversione

$$(W).\delta x{\leftarrow}V.T \quad \to_\upsilon \quad \delta x{\leftarrow}V.(W).T$$

δ-espansione contestuale

$$D.\delta x{\leftarrow}V.D' \vdash \quad T \quad \to_\delta \quad [x^+{\leftarrow}V]T$$

Assegnamento del tipo

$$\frac{}{C \vdash_g \mathsf{Sort}_h : \mathsf{Sort}_{\mathsf{next}_g(h)}}\ \mathsf{sort}$$

$$\frac{C = D.\delta x{\leftarrow}V.D' \quad D \vdash_g V : T}{C \vdash_g x : T}\ \mathsf{def}$$

$$\frac{C = D.\lambda x{:}V.D' \quad D \vdash_g V : T}{C \vdash_g x : V}\ \mathsf{decl}$$

$$\frac{C \vdash_g V : T \quad C.\delta x{\leftarrow}V \vdash_g T_1 : T_2 \quad C.\delta x{\leftarrow}V \vdash_g T_2 : T_0}{C \vdash_g \delta x{\leftarrow}V.T_1 : \delta x{\leftarrow}V.T_2}\ \mathsf{abbr}$$

$$\frac{C \vdash_g V : T \quad C.\lambda x{:}V \vdash_g T_1 : T_2 \quad C.\lambda x{:}V \vdash_g T_2 : T_0}{C \vdash_g \lambda x{:}V.T_1 : \lambda x{:}V.T_2}\ \mathsf{abst}$$

$$\frac{C \vdash_g W : V \quad C \vdash_g U : \lambda x{:}V.T}{C \vdash_g (W).U : (W).\lambda x{:}V.T}\ \mathsf{appl}$$

$$\frac{C \vdash_g T_1 : T_2 \quad C \vdash_g T_2 : T_0}{C \vdash_g \langle T_2 \rangle.T_1 : T_2}\ \mathsf{cast}$$

$$\frac{C \vdash_g T_2 : T \quad C \vdash_g V : T_1 \quad C \vdash T_1 \Leftrightarrow^* T_2}{C \vdash_g V : T_2}\ \mathsf{conv}$$

Spazio dei livelli

$$\mathbb{L} \equiv \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \mathbb{L} \to \mathbb{L}$$

Livello successivo stretto

$$\begin{cases} (h, 0) +_g 1 & \equiv & (\mathsf{next}_g(h), 0) \\ (h, k+1) +_g 1 & \equiv & (h, k) \\ (L_1 \to L_2) +_g 1 & \equiv & L_1 \to (L_2 +_g 1) \end{cases}$$

Livello successivo stretto iterato

$$\begin{cases} L +_g 0 & \equiv & L \\ L +_g (k+1) & \equiv & (L +_g k) +_g 1 \end{cases}$$

Uguaglianza di livello

$$\frac{(h_1, k_1) +_g k = (h_2, k_2) +_g k}{(h_1, k_1) =_g (h_2, k_2)}\ \text{node}$$

$$\frac{L_1 =_g L_2 \quad L_3 =_g L_4}{L_1 \to L_3 =_g L_2 \to L_4}\ \text{comp}$$

Assegnamento dell'arietà

$$\frac{}{C \vdash_g \mathsf{Sort}_h \triangleright (h, 0)}\ \mathsf{sort}$$

$$\frac{C = D.\delta x{\leftarrow}V.D' \quad D \vdash_g V \triangleright L}{C \vdash_g x \triangleright L}\ \mathsf{def}$$

$$\frac{C = D.\lambda x{:}V.D' \quad D \vdash_g V \triangleright L +_g 1}{C \vdash_g x \triangleright L}\ \mathsf{decl}$$

$$\frac{C \vdash_g V \triangleright L_1 \quad C.\delta x{\leftarrow}V \vdash_g T \triangleright L_2}{C \vdash_g \delta x{\leftarrow}V.T \triangleright L_2}\ \mathsf{abbr}$$

$$\frac{C \vdash_g V \triangleright L_1 +_g 1 \quad C.\lambda x{:}V \vdash_g T \triangleright L_2}{C \vdash_g \lambda x{:}V.T \triangleright L_1 \to L_2}\ \mathsf{abst}$$

$$\frac{C \vdash_g V \triangleright L_1 \quad C \vdash_g T \triangleright L_1 \to L_2}{C \vdash_g (V).T \triangleright L_2}\ \mathsf{appl}$$

$$\frac{C \vdash_g V \triangleright L +_g 1 \quad C \vdash_g T \triangleright L}{C \vdash_g \langle V \rangle.T \triangleright L}\ \mathsf{cast}$$

$$\frac{C \vdash_g T \triangleright L_1 \quad L_1 =_g L_2}{C \vdash_g T \triangleright L_2}\ \mathsf{conv}$$

Principali proprietà certificate (1)

Le λ-astrazioni sono η-convertibili

Se $C \vdash T \Leftrightarrow^* \lambda x{:}W.U$ e $C \vdash V \Leftrightarrow^* W$ e $x \notin \mathsf{FV}(T)$ allora

$C \vdash \lambda x{:}V.(x).T \Leftrightarrow^* T$

La riduzione è confluente

Se $C \vdash T_0 \Rightarrow^* T_1$ e $C \vdash T_0 \Rightarrow^* T_2$ allora esiste T per cui

$C \vdash T_1 \Rightarrow^* T$ e $C \vdash T_2 \Rightarrow^* T$

I tipi sono tipabili

Se $C \vdash_g T_1 : T_2$ allora esiste T_3 per cui $C \vdash_g T_2 : T_3$

I tipi di un termine sono sono convertibili

Se $C \vdash_g T : T_1$ e $C \vdash_g T : T_2$ allora $C \vdash T_1 \Leftrightarrow^* T_2$

La λ-astrazione è predicativa

Se $C \vdash_g \lambda x{:}V.T : U$ allora $C \nvdash U \Leftrightarrow^* V$

I termini non tipano sé stessi

Se $C \vdash_g T : U$ allora $C \nvdash U \Leftrightarrow^* T$

Principali proprietà certificate (2)

La riduzione preserva il tipo

Se $C \vdash T \Rightarrow^* T_1$ e $C \vdash_g T : T_2$ allora $C \vdash_g T_1 : T_2$

L'inferenza del tipo è decidibile

$C \nvdash_g T_1 : T_2$ oppure esiste T_2 per cui $C \vdash_g T_1 : T_2$

Le arietà di un termine appartengono allo stesso livello

Se $C \vdash_g T \triangleright L_1$ e $C \vdash_g T \triangleright L_2$ allora $L_1 =_g L_2$

La riduzione preserva l'arietà

Se $C \vdash T_1 \Rightarrow^* T_2$ e $C \vdash_g T_1 \triangleright L$ allora $C \vdash_g T_2 \triangleright L$

I termini tipabili sono arietabili

Se $C \vdash_g T_1 : T_2$ allora esiste L per cui

$C \vdash_g T_1 \triangleright L$ e $C \vdash_g T_2 \triangleright L +_g 1$

I termini arietabili sono fortemente normalizzabili

Se $C \vdash_g T \triangleright L$ allora $C \vdash \mathsf{sn}(T)$

$\lambda\delta$ **come teoria delle espressioni per** MTT

Costanti primitive	$\Rightarrow$	Riferimenti ad astraz.
Costanti definite	$\Rightarrow$	Riferimenti ad abbrev.
Variabili	$\Rightarrow$	Variabili
Astrazioni	$\Rightarrow$	Astrazioni tipate
Applicazioni	$\Rightarrow$	Applicazioni
Uguaglianza def.	$\Rightarrow$	Conversione

I giudizi di $\lambda\delta$ come giudizi di MTT

Le sorte Prop e Set	$\Rightarrow$	Sort_0 e Sort_1
Gerarchia delle sorte	$\Rightarrow$	$\text{next}(h) \equiv h + 2$
Dichiarazioni nei contesti	$\Rightarrow$	astrazioni
Giudizi dichiarativi	$\Rightarrow$	Giudizi di tipo
Giudizi di uguaglianza	$\Rightarrow$	Giudizi di conv.
Giudizio di contesto legale	$\Rightarrow$	non serve

$\lambda\delta$ **come parte strutturale di** MTT

Idea

Le regole strutturali di MTT diventano proprietà meta-teoretiche di $\lambda\delta$

Ad esempio

$$\frac{A \text{ Prop } [\Gamma]}{pr(A) \text{ Set } [\Gamma]} \text{ ps } \Rightarrow \text{ appl}$$

$$\frac{A \text{ Set } [\Gamma]}{x \in A \text{ Set } [\Gamma, x \in A \text{ Set}, \Delta]} \text{ var } \Rightarrow \text{ decl}$$

$$\frac{a \in A_1 \text{ Set } [\Gamma] \quad A_1 = A_2 \text{ Set } [\Gamma]}{a \in A_2 \text{ Set } [\Gamma]} \text{ seteq } \Rightarrow \text{ conv}$$