Costruttivizzazione del Teorema della Convergenza Dominata di Lebesgue

Rapporto interno

Claudio Sacerdoti Coen* Enrico Zoli†

1 Introduzione

Vi è, nella letteratura matematica contemporanea, un approccio alla teoria della misura e della integrazione assai più astratto di quello normalmente seguito nel corso degli studi accademici. Più precisamente, intendiamo una teoria per nulla "vincolata" agli insiemi (misurabili) ed alle funzioni (misurabili) definite su di essi, quanto invece trattata nel contesto algebrico-topologico-analitico degli spazi di Riesz (altrimenti detti "reticoli vettoriali" o "reticoli lineari").

Risultati fondamentali dell'Analisi Reale quali i teoremi di Beppo Levi, di Fatou e di Lebesgue (per citarne solo alcuni) trovano nell'ambito astratto di tali strutture la loro "ideale" collocazione. Nei loro testi, influenti autori (quali Luxemburg–Zaanen [8] prima, Aliprantis–Burkinshaw [1] e Fremlin [6],[7] più recentemente) indicano una via assai "naturale": munire un dato reticolo algebrico $(R, \vee, \wedge)$ di una struttura di $\mathbb{R}$-spazio vettoriale normato $(V, +, \cdot, \|\cdot\|)$, imponendo ovviamente le necessarie condizioni di "compatibilità" tra le operazioni lineari $+$ e $\cdot$ definite in V e le operazioni reticolari $\vee$ e $\wedge$; studiare l'importante relazione tra la convergenza nel senso dell'ordine $\leq$ canonicamente indotto in R dalle operazioni $\vee, \wedge$ e la convergenza nel senso topologico indotto dalla norma $\|\cdot\|$ in V; trattare i funzionali lineari, cioè le applicazioni lineari e continue da V in $\mathbb{R}$, di cui l'operatore integrale costituisce forse il più importante degli esempi.

*Dipartimento di Scienze dell'Informazione, Università di Bologna. Via Mura Anteo Zamboni, 5 — 40127 Bologna. E-mail: sacerdot@cs.unibo.it

†Dipartimento di Scienze dell'Informazione, Università di Bologna. Via Mura Anteo Zamboni, 5 — 40127 Bologna. E-mail: e.zoli@unibo.it

Da alcuni matematici è stato recentemente notato, tuttavia, che una parte di tale teoria astratta dell'integrazione prescinde dalla struttura vettoriale dello spazio V. In altri termini, per dimostrare, ad esempio, il Teorema della Convergenza Dominata di Lebesgue è possibile seguire un approccio più generale ancora di quello sopra citato, sostituendo lo spazio normato V con uno spazio (semi-)metrico (M, d). Tra gli studiosi impegnati in questa direzione, citiamo Hans Weber, da alcuni articoli del quale la nostra ricerca ha preso spunto [10],[11]. In buona sostanza, l'idea di Weber è che l'essenza, per così dire, del teorema di Lebesgue sta nel dedurre la convergenza *nella metrica di* M di una data successione, supposto che tale successione è limitata e converge *nel senso dell'ordine in* R. Nulla più.

Come principale obiettivo, ci proponiamo in questo rapporto di formulare e dimostrare "costruttivamente" il teorema di Lebesgue adattando allo scopo gli argomenti di Weber. Tale "costruttivizzazione" costituisce l'argomento della Sezione 3, nella quale indicheremo con dovizia di particolari i singoli passaggi tesi alle dimostrazioni dei risultati. (È, aggiungiamo, nella "natura" stessa della matematica costruttivo-computazionale procedere formalmente per passi minimi, ma privi di ambiguità.)

Crediamo utile anteporre alla versione "costruttiva" del teorema della convergenza dominata quella, per così dire, "classica", ovvero fondata sulla logica classica (intendiamo, qui, la logica che ammette il principio del terzo escluso e la *reductio ad absurdum*). Nella Sezione 2 enunciamo e dimostriamo il teorema di Lebesgue, studiato nell' ambito dei reticoli muniti di una valutazione, ossia di una funzione modulare e monotona.

Per completezza, nella Sezione 4 enunciamo, indicandone per sommi capi le dimostrazioni, i due teoremi di Lebesgue e Fatou formulati nell'ambito degli L-spazi (esempi particolari di reticoli di Banach). Tra i numerosi testi che trattano dell'argomento, ci siamo avvalsi dell'ottimo testo di Fremlin [6] e del suo recentissimo trattato [7].

In letteratura sono rari i tentativi di rivedere nell'ottica della matematica costruttiva secondo Bishop [4] l'intera teoria della misura e della integrazione: tra questi segnaliamo il lavoro di Bas Spitters [9], il quale ha tradotto in matematica costruttiva alcuni degli argomenti trattati da Fremlin. Alle idee di Spitters ci siamo in parte ispirati; nel corso della nostra costruttivizzazione spenderemo diverse parole per evidenziare analogie e differenze tra il nostro approccio ed il suo.

Adotteremo nel seguito il modello costruttivo dei reali proposto nella nota [5] da Ciaffaglione e Di Gianantonio. Applicheremo (più o meno tacitamente) tutti i risultati validi nel loro modello (in buona sostanza gli stessi di un qualsiasi modello costruttivo di $\mathbb{R}$) necessari alla nostra analisi.

2 Approccio reticolare

Seguendo Weber [10],[11], ci occuperemo in questa sezione del teorema di Lebesgue formulato nell'ambito della teoria dei reticoli. Non siamo interessati, qui, alla massima generalità della sua formulazione: concentreremo il nostro studio sui cosiddetti reticoli valutati (o con valutazione).

Sia $(L, \vee, \wedge)$ un reticolo algebrico (rinviamo ad un qualunque testo, ad esempio [3], per la definizione e le prime proprietà di un reticolo algebrico). Sia $(R, \vee, \wedge, \mu)$ una struttura tale che: $(R, \vee, \wedge)$ è un sottoreticolo di $(L, \vee, \wedge)$; il funzionale $\mu : R \to \mathbb{R}$ è una valutazione in R, cioè μ è modulare e monotono: per ogni $a, b \in R$ vale

$$\mu(a \vee b) + \mu(a \wedge b) = \mu(a) + \mu(b); \qquad \mu(a) \leq \mu(a \vee b)$$

(si osservi che la monotonia del funzionale μ può essere equivalentemente espressa da $\mu(a \wedge b) \leq \mu(a)$). È facile vedere che la relazione in L definita da

$$a \leq b :\Leftrightarrow a \wedge b = a \Leftrightarrow b = a \vee b$$

risulta una relazione d'ordine parziale in L (e quindi anche in R). Supporremo in questa sezione che L ed R sono ordinati secondo *questo* ordine parziale $\leq$.

Definizione 2.1. *Dati $a, b \in R$, definiamo $d(a, b) := \mu(a \vee b) - \mu(a \wedge b)$.*

È immediato riconoscere che $d(a, a) = 0$ e che $d(a, b) = d(b, a)$. Di più, vale la disuguaglianza triangolare per d: in altra parole, d è una semi-metrica in R:

Teorema 2.2. *Per ogni $a, b, c \in R$ vale $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$.*

Rinviamo il lettore a Birkhoff [3] per la dimostrazione del Teorema 2.2 (forniremo nella prossima sezione la versione "costruttiva" di tale teorema, virtualmente identica a quella di Birkhoff).

Lemma 2.3. *Siano $a, b, x \in R$ con $a \leq x \leq b$. Allora*

$$d(a, b) = d(a, x) + d(b, x).$$

In particolare, $\max\{d(x, a), d(x, b)\} \leq d(a, b)$.

Proof. Abbiamo

$$d(a, b) = \mu(b) - \mu(a) = \mu(b) - \mu(x) + \mu(x) - \mu(a) = d(b, x) + d(a, x),$$

cioè la desiderata additività della distanza sulle catene. □

Lemma 2.4 (dei due Carabinieri). *Siano $(a_n), (b_n), (x_n)$ successioni in R tali che $a_n \leq x_n \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e tali che $d(a_n, x) \to 0$ e $d(b_n, x) \to 0$ per un qualche $x \in R$. Allora $d(x_n, x) \to 0$.*

Proof. Si ha, applicando il Teorema 2.2 ed il lemma precedente,

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, a_n) + d(a_n, x) \leq d(b_n, a_n) + d(a_n, x) \leq d(b_n, x) + 2d(x, a_n),$$

da cui, per le ipotesi, la conclusione. □

Lemma 2.5. *Una successione crescente (a_n) e superiormente limitata in R è di Cauchy. Analogamente, una successione decrescente (b_n) e inferiormente limitata in R lo è.*

Proof. La successione $\mu(a_n)$ è monotona crescente e superiormente limitata, quindi di Cauchy. D'altro canto, per ogni $m, n \in \mathbb{N}$ con $n \geq m$ abbiamo $d(a_n, a_m) = \mu(a_n) - \mu(a_m)$. □

Classicamente, ogni successione di numeri reali crescente e limitata ammette limite (i.e., estremo superiore). Ricordiamo che in matematica costruttiva ciò non è derivabile (il che rende necessario studiare il concetto di "totale limitatezza"): non è difficile "definire" successioni crescenti e limitate per le quali non è possibile calcolare il limite, cioè l'estremo superiore.

La convergenza nel senso dell'ordine *non* implica, in generale, la convergenza indotta dalla semi-metrica d. Tale implicazione è peraltro il "nocciolo" dei risultati che ci interessano. La seguente proprietà di *order continuity* per la funzione modulare μ è fondamentale, qui:

Definizione 2.6. *Diciamo che μ è* order continuous *se per ogni successione crescente (a_n) in R con $a := \sup a_n \in R$ e per ogni successione decrescente (b_n) in R con $b := \inf b_n \in R$, risultano $\mu(a) = \sup \mu(a_n)$ e $\mu(b) = \inf \mu(b_n)$.*

Lemma 2.7. *Sia μ order continuous in R; siano (a_n) e a in R tali che $a_n \uparrow a$. Allora $d(a_n, a) \to 0$. Analoga affermazione vale per una successione (b_n) ed un elemento b in R tali che $b_n \downarrow b$.*

Proof. Dimostrazione ovvia: poiché $a_n \leq a$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$d(a, a_n) = \mu(a) - \mu(a_n) \to 0.$$

Identico ragionamento per il caso di una successione decrescente (b_n) con estremo inferiore $b \in R$. □

Per le versioni "reticolari" del teorema di Lebesgue e del lemma di Fatou manca ancora un ingrediente, ossia la "completezza" di R in quanto sottoreticolo di L. Eccolo:

Definizione 2.8. *Diciamo che R è* completely embedded *in L se, per ogni successione (a_n) in R di Cauchy tale che $a_n \uparrow a \in L$ (tale che $a_n \downarrow a \in L$), si ha $a \in R$.*

Supporremo fino al termine della sezione che il reticolo R è completely embedded in L e che la funzione modulare μ in R è order continuous.

Teorema 2.9. *Siano $a, b \in R$ con $a \leq b$ e sia (x_n) una successione in $R \cap [a, b] := \{x \in R : a \leq x \leq b\}$. Si ha che $\liminf x_n$ e $\limsup x_n$ appartengono a $R \cap [a, b]$; non solo,*

$$d(\liminf x_n, a) \leq \liminf d(x_n, a); \qquad d(\limsup x_n, b) \leq \liminf d(x_n, b).$$

Proof. Osserviamo innanzitutto che $l := \liminf x_n := \sup_n \inf_{i \geq n} x_i \in R$. Infatti, definito $\alpha_n := \inf_{i \geq n} x_i$, abbiamo $\alpha_n \uparrow l$. Ci basta quindi mostrare che $\alpha_n \in R$ per ogni n e poi applicare il Lemma 2.5 combinato con l'ipotesi su R: questo segue subito dal fatto che α_n è l'estremo inferiore della successione *decrescente* $k \mapsto \inf_{n \leq i \leq n+k} x_i$. Ovviamente, da $a \leq \alpha_n \leq x_n$ segue $d(\alpha_n, a) \leq d(x_n, a)$.

Sfruttando adesso l'ipotesi su μ ed il Lemma 2.7, da $\alpha_n \uparrow l$ deduciamo $d(\alpha_n, l) \to 0$. Ciò significa che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $m \in \mathbb{N}$ con $d(\alpha_m, l) \leq \epsilon$. In virtù della monotonia di (α_n), per tutti gli $n \geq m$ abbiamo

$$d(l, a) = d(l, \alpha_m) + d(\alpha_m, a) \leq \epsilon + d(\alpha_m, a) \leq \epsilon + d(\alpha_n, a) \leq \epsilon + d(x_n, a).$$

In conclusione,

$$d(\liminf x_n, a) \leq \epsilon + \inf_{n \geq m} d(x_n, a) = \epsilon + \liminf d(x_n, a),$$

da cui, essendo ϵ arbitrario, $d(\liminf x_n, a) \leq \liminf d(x_n, a)$.

L'altro caso si tratta in modo del tutto analogo. □

Possiamo ora formulare e dimostrare la versione "reticolare" del teorema di Lebesgue.

Teorema 2.10 (della Convergenza Dominata). *Siano $a, b \in R$ con $a \leq b$. Siano poi $x \in L$ e $(x_n) \in R \cap [a, b]$ tali che $\liminf x_n = \limsup x_n = x \in L$. Allora $x \in R$ e $d(x_n, x) \to 0$.*

Proof. Segue dalla dimostrazione del precedente teorema che $x \in R \cap [a, b]$. Inoltre, posti $\alpha_n := \inf_{i \geq n} x_i$ e $\beta_n := \sup_{i \geq n} x_i$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, abbiamo $\alpha_n \uparrow x$ e $\beta_n \downarrow x$. Dal Lemma 2.7 ricaviamo $d(\alpha_n, x) \to 0$ e $d(\beta_n, x) \to 0$. Il Lemma dei due Carabinieri conclude la dimostrazione, essendo $\alpha_n \leq x_n \leq \beta_n$. □

3 Costruttivizzazione

Ci occupiamo ora della “traduzione” costruttiva del teorema di Lebesgue, come studiato nella precedente sezione. L’ambito del nostro studio è quello dei reticoli semi-metrici di cui, come vedremo in Sezione 3.5, quelli valutati costituiscono una importante sottoclasse. Osserviamo sin da ora (ma sarà notato ancora, nel corso della sezione) che non è del tutto preciso parlare di “versione costruttiva del teorema di Lebesgue”. Come precedentemente illustrato, l’essenza del teorema classico sta nel confronto tra due distinte nozioni di convergenza, quella topologico-metrica *versus* quella indotta dalla relazione d’ordine del reticolo. Qui analizziamo e confrontiamo due tipi di convergenza, una indotta da una semi-metrica, l’altra definita nei termini di una relazione d’ordine, a sua volta “indotta” da una semi-metrica non equivalente alla prima. Insomma, in buona sostanza il confronto è tra due tipi di convergenza definiti nei termini di due distinte (ovvero non equivalenti) semi-metriche.

Peraltro, nell’articolo di Spitters, cui ci siamo ispirati, questa “anomalia” si presenta ancora più marcata: il confronto convergenza puntuale (quasi ovunque) vs convergenza forte (in norma) del Teorema di Lebesgue classico (vedere, ad esempio, Teorema 5.6 nel libro di Bartle [2]), viene sostituito dal confronto tra convergenza in misura vs convergenza forte (vedere Teorema 7.8 in [2]).

3.1 Assiomi di reticolo semi-metrico (costruttivo) e prime conseguenze

Per *reticolo semi-metrico* intendiamo la struttura $(R, \vee, \wedge, d)$, dove: R è un insieme (non vuoto); (R, d) è uno spazio semi-metrico (i.e., d è una semi-metrica in R); le applicazioni $\vee, \wedge : R \times R \to R$ soddisfano le seguenti proprietà: per ogni $a, b, c \in R$ si ha

1. $d(a \vee a, a) = 0 = d(a \wedge a, a)$;
2. $d(a \vee b, b \vee a) = 0 = d(a \wedge b, b \wedge a)$;
3. $d((a \vee b) \vee c, a \vee (b \vee c)) = 0 = d((a \wedge b) \wedge c, a \wedge (b \wedge c))$;
4. $d(a \vee (a \wedge b), a) = 0 = d(a \wedge (a \vee b), a)$;
5. $d(a \vee b, a \vee c) + d(a \wedge b, a \wedge c) \leq d(b, c)$.

Ricordiamo, a beneficio del lettore, che la coppia (R, d) si dice spazio semi-metrico se la funzione $d : R \times R \to \mathbb{R}$ soddisfa le seguenti proprietà: per ogni $a, b, c \in R$ valgono

1. $d(a, b) \geq 0$ e $d(a, a) = 0$;
2. $d(a, b) = d(b, a)$;
3. $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$.

Ometteremo in futuro di dichiarare esplicitamente il ricorso alle proprietà sopra elencate, quando necessarie. Ometteremo inoltre le dimostrazioni di tutti i risultati ottenibili per semplice "dualità" da quelli già provati.

Definizione 3.1. *Siano $a, b \in R$. Diciamo che $a \neq b$ se $d(a, b) > 0$. Poniamo inoltre $a = b$ qualora $\neg(a \neq b)$, vale a dire $d(a, b) = 0$.*

È immediato constatare che la relazione $\neq$ è anti-riflessiva e simmetrica, dunque che la relazione $=$ è riflessiva e simmetrica.

Proposizione 3.2. *La relazione $\neq$ in R è co-transitiva.*

Proof. Segue banalmente dal fatto che d è una semi-metrica. $\square$

Lemma 3.3. *Se $a = a'$ e $b = b'$ allora $d(a, b) = d(a', b')$.*

Proof. Immediata applicazione della disuguaglianza triangolare:

$$d(a, b) \leq d(a, a') + d(a', b') + d(b', b) = d(a', b');$$

analogamente, $d(a', b') \leq d(a, b)$. La tesi segue ora dal fatto che, nel modello costruttivo di $\mathbb{R}$, da $x \leq y$ e $y \leq x$ segue $x = y$. $\square$

Lemma 3.4. *Per ogni $a, b \in R$, $d(a \wedge b, a) = d(a \vee b, b)$.*

Proof. Grazie al lemma precedente, abbiamo da un lato

$$d(a \wedge b, a) = d(a \wedge b, a \wedge (a \vee b)) \leq d(b, a \vee b) = d(a \vee b, b);$$

dall'altro

$$d(a \vee b, b) = d(b \vee a, b \vee (b \wedge a)) \leq d(a, a \wedge b) = d(a \wedge b, a).$$

Da qui la tesi. $\square$

Definizione 3.5. *Siano $a, b \in R$. Diciamo che $a \not\leq b$ se $a \neq a \wedge b$ o, equivalentemente, se $a \vee b \neq b$. Definiamo poi $a \leq b$ se $\neg(a \not\leq b)$.*

Si osservi che $a \leq b$ se e solo se $d(a \wedge b, a) = d(a \vee b, b) = 0$.

Proposizione 3.6. *La relazione* $\not\leq$ *in* L *è co-transitiva.*

Proof. Siano $a, b, c \in R$ con $a \not\leq c$. Essendo

$$0 < d(a, a \wedge c) \leq d(a, a \wedge b) + d(a \wedge b, a \wedge b \wedge c) + d(a \wedge b \wedge c, a \wedge c) \leq \\ d(a, a \wedge b) + d(b, b \wedge c) + d(b \wedge c, b) = d(a, a \wedge b) + 2d(b, b \wedge c),$$

ricaviamo $d(a, a \wedge b) > 0$ oppure $2d(b, b \wedge c) > 0$, ossia $a \not\leq b$ oppure $b \not\leq c$. Notiamo che abbiamo sfruttato i seguenti fatti validi nel modello costruttivo di $\mathbb{R}$: da $0 < x + y$ segue $0 < x$ oppure $0 < y$; la disuguaglianza $0 < 2x$ è equivalente a $0 < x$. $\square$

Proposizione 3.7. $a \not\leq b$ *e* $c \leq b$ *implicano* $a \not\leq c$.

Proof. Sfruttiamo la co-transitività di $\not\leq$: abbiamo $c \not\leq b$ oppure $a \not\leq c$. La prima ipotesi è da scartare per ipotesi, dunque resta valida la seconda. $\square$

Lemma 3.8. $a = b$ *se e solamente se* $a \leq b$ *e* $b \leq a$.

Proof. Infatti, $0 \leq d(a, a \wedge b) = d(a \wedge a, a \wedge b) \leq d(a, b)$; quindi, $d(a, b) = 0$ implica $a \leq b$ e, per simmetria, $b \leq a$. Essendo $d(a, b) \leq d(a, a \wedge b) + d(a \wedge b, b)$, abbiamo immediatamente anche l'altra implicazione. $\square$

Lemma 3.9. *Se* $a = a'$ *e* $b = b'$, *allora* $a \wedge b = a' \wedge b'$ *e* $a \vee b = a' \vee b'$.

Proof. Si ha

$$d(a \wedge b, a' \wedge b') \leq d(a \wedge b, a \wedge b') + d(a \wedge b', a' \wedge b') \leq d(a, a') + d(b, b') = 0,$$

quanto si voleva. $\square$

La seguente proposizione è particolarmente importante.

Proposizione 3.10. *La relazione* $\leq$ *è una relazione d'ordine parziale.*

Proof. Banalmente $\leq$ è riflessiva. Mostriamo che $\leq$ è transitiva. Siano $a \leq b$ e $b \leq c$. Si ha

$$d(a \wedge c, a) \leq d(a \wedge c, a \wedge b) + d(a \wedge b, a) = d((a \wedge b) \wedge c, a \wedge b) + 0 = \\ d(a \wedge (b \wedge c), a \wedge b) \leq d(b \wedge c, b) = 0,$$

grazie al Lemma 3.9. $\square$

Lemma 3.11. *Siano* $a, b, c \in R$ *tali che* $a \leq b \leq c$. *Allora* $d(a, c) = d(a, b) + d(b, c)$.

Proof. Poiché la disuguaglianza triangolare $d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c)$ è sempre valida, ci basta mostrare la disuguaglianza inversa. Questa deriva dagli assiomi di reticolo semi-metrico e dal Lemma 3.3:

$$d(a,b) + d(b,c) = d(b \wedge a, b \wedge c) + d(b \vee a, b \vee c) \leq d(a,c).$$

Le due inverse disuguaglianze completano la prova (da notare che nel modello costruttivo di $\mathbb{R}$, è derivabile l'implicazione $x \leq y$ e $y \leq x \Rightarrow x = y$). $\square$

Il fatto che, sulle catene, la distanza sia additiva nel senso precisato dal lemma precedente è estremamente importante per noi: è questo, in parole povere, che rende il reticolo in esame "simile" alla retta reale. Ed è questo, incidentalmente, che rende necessario l'assioma 5 dei reticoli semi-metrici.

Lemma 3.12. *Siano $a, b, c \in R$ tali che $a \leq b$ e $c \leq b$. Allora $a \vee c \leq b$. Dualmente, se $a \leq b$ e $a \leq c$ allora $a \leq b \wedge c$.*

Proof. Risulta infatti

$$d((a \vee c) \vee b, b) = d((a \vee b) \vee c, b \vee c) \leq d(a \vee b, b) = 0.$$

L'altro caso è del tutto analogo. $\square$

Lemma 3.13. *Siano $a, b \in R$. Allora $a \wedge b \leq a \leq a \vee b$ e $a \wedge b \leq b \leq a \vee b$.*

Proof. Deriva immediatamente dagli assiomi di reticolo semi-metrico. $\square$

Lemma 3.14. *Siano $a, b, c, d \in R$. Se $a \leq c$ e $b \leq d$ allora $a \vee b \leq c \vee d$ e $a \wedge b \leq c \wedge d$.*

Proof. Per il Lemma 3.13 abbiamo $a \leq c \leq c \vee d$ e $b \leq d \leq c \vee d$; dunque $a \vee b \leq c \vee d$, grazie al Lemma 3.12. Analogamente, $a \wedge b \leq a \leq c$ e $a \wedge b \leq b \leq d$ implicano $a \wedge b \leq c \wedge d$. $\square$

Proposizione 3.15. *Siano $a, b, c, d \in R$ tali che $a \vee b \neq c \vee d$. Allora $a \neq c$ oppure $b \neq d$; analogamente, se $a \wedge b \neq c \wedge d$ allora $a \neq c$ oppure $b \neq d$.*

Proof. Si ha infatti

$$\begin{aligned}
&0 < d(a \vee b, c \vee d) \leq d(a \vee b, a \vee d) + d(a \vee d, c \vee d) = \\
&d(a \vee b, a \vee d) + d(d \vee a, d \vee c) \leq d(b,d) + d(a,c),
\end{aligned}$$

da cui $d(b,d) > 0$ oppure $d(a,c) > 0$, ovvero $b \neq d$ o $a \neq c$. (Precisiamo ancora che l'implicazione $0 < x + y \Rightarrow 0 < x$ oppure $0 < y$ è derivabile senza il principio del terzo escluso, dunque costruttivamente valida). $\square$

Dimostriamo ora il Teorema (costruttivo) dei due Carabinieri. La prova, identica a quella del Lemma 2.4, è riportata per completezza.

Teorema 3.16 (dei due Carabinieri). *Siano $(a_n), (b_n), (x_n)$ successioni in R tali che $a_n \leq x_n \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e tali che $d(a_n, x) \to 0$ e $d(b_n, x) \to 0$ per un qualche $x \in R$. Allora $d(x_n, x) \to 0$.*

Proof. Grazie al Lemma 3.11, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, a_n) + d(a_n, x) \leq d(b_n, a_n) + d(a_n, x) \leq d(b_n, x) + 2d(x, a_n);$$

da qui, in vista delle ipotesi, la conclusione. (Notiamo che abbiamo sfruttato il fatto seguente, valido nei reali costruttivi: $x \leq y$ implica $x+z \leq y+z$). □

Abbiamo omesso di definire l'espressione $d(x_n, x) \to 0$, essendo questa da intendersi esattamente come nel caso classico.

Nel seguito faremo ricorso al teorema di unicità del limite (nel senso della semi-metrica d) ed al fatto che ogni successione convergente è di Cauchy: eccone gli enunciati precisi (con dimostrazione).

Proposizione 3.17. *Siano (x_n) una successione in R ed $x, y \in R$. Se $d(x_n, x) \to 0$ e $d(x_n, y) \to 0$, allora $x = y$.*

Proof. Supponiamo $x \neq y$, ossia che esista $\delta > 0$ tale che $d(x, y) > \delta$. Siano $\bar{n}$ e $\bar{m}$ tali che $d(x_n, x) \leq \frac{\delta}{2}$ per ogni $n \geq \bar{n}$ e $d(x_n, y) \leq \frac{\delta}{2}$ per ogni $n \geq \bar{m}$. Poniamo $N := \max\{\bar{n}, \bar{m}\}$. Risulta allora

$$d(x, y) \leq d(x, x_N) + d(x_N, y) \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,$$

contrariamente all'ipotesi. □

Proposizione 3.18. *Sia (x_n) una successione in R. Se $d(x_n, x) \to 0$ per un qualche $x \in R$, allora (x_n) è di Cauchy.*

Proof. Fissiamo ad arbitrio $\epsilon > 0$. Sia $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $d(x_n, x) \leq \frac{\epsilon}{2}$. Allora, per ogni $n, m \geq \bar{n}$ risulta

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(y_n, y) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Ciò precisamente significa che la successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy. □

3.2 Prosecuzione

Nel seguito, supporremo la quadrupla $(R, \vee, \wedge, d)$ un reticolo semi-metrico. Il reticolo R si intenderà munito delle relazioni $\not\leq$, $\leq$, $=$ e $\neq$ naturalmente indotte dalla sua stessa struttura di reticolo semi-metrico (vedere Sezione 3.1).

La nozione di estremo superiore (inferiore) per successioni crescenti (decrescenti) è fondamentale, per il seguito.

Definizione 3.19. *Siano (x_n) una successione crescente in R ed $x \in R$. Diciamo che x è un* estremo superiore *della successione (x_n) se: x è maggiorante di (x_n), ossia $x_n \leq x$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; inoltre, $d(x_n, x) \to 0$.*

La definizione di estremo inferiore per una data successione decrescente (x_n) di elementi di R è del tutto analoga.

Proposizione 3.20. *Sia (x_n) una successione crescente (decrescente) in R. Supponiamo esistano $x, y \in R$ entrambi estremo superiore (estremo inferiore) di (x_n). Allora $x = y$.*

Proof. Segue direttamemente dalla Proposizione 3.17, il teorema di unicità del limite. □

L'essere estremo superiore (inferiore) implica l'essere estremo superiore (inferiore) *forte*, nel senso ben noto ai costruttivisti ed espresso sotto.

Proposizione 3.21. *Sia (x_n) una successione crescente (decrescente) con x come estremo superiore (inferiore). Allora non esiste un maggiorante (minorante) y della successione (x_n) con $y \neq x$ e $y \leq x$ $(x \leq y)$.*

Proof. Sia dunque $y \leq x$ e $d(y, x) \geq \delta > 0$. Sia poi n tale che $d(x_n, x) < \frac{\delta}{3}$. Abbiamo

$$\begin{aligned}
&\delta \leq d(x, y) = d(x, x \wedge y) \\
&\leq d(x, x_n) + d(x_n, x_n \wedge y) + d(x_n \wedge y, x \wedge y) \leq \\
&d(x, x_n) + d(x_n, x_n \wedge y) + d(x_n, x) = 2d(x, x_n) + d(x_n, x_n \wedge y) \leq \\
&\frac{2}{3}\delta + d(x_n, x_n \wedge y),
\end{aligned}$$

il che implica $d(x_n, x_n \wedge y) > \frac{\delta}{3}$ e quindi $x_n \not\leq y$. □

Corollario 3.22. *Siano (x_n) una successione crescente (decrescente) in R ed $x \in R$ con $x = \sup x_n$ $(x = \inf x_n)$. Allora, per ogni maggiorante (minorante) y della successione (x_n) riesce $x \leq y$ $(y \leq x)$.*

Proof. Supponiamo $x \not\leq y$, ossia che esista $\delta > 0$ con $d(x \wedge y, x) \geq \delta > 0$. Abbiamo, per i Lemmi 3.12 e 3.13, $x_n \leq x \wedge y \leq x$, ma questo contrasta con Proposizione 3.21. □

Lemma 3.23. *Sia (x_n) una successione crescente (decrescente) in R. Se esiste $x \in R$ tale che $d(x_n, x) \to 0$, allora $x = \sup x_n$ ($x = \inf x_n$).*

Proof. Basta mostrare che x è un maggiorante della successione (x_n), ovvero $x_n \leq x$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Fissiamo dunque $n \in \mathbb{N}$. Per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $d(x, x_m) < \epsilon$ per ogni m con $m \geq \bar{n}$. Quindi, per tutti i naturali $m \geq \max\{n, \bar{n}\}$ risulta, in virtù della Proposizione 3.3,

$$d(x \wedge x_n, x_n) = d(x \wedge x_n, x_m \wedge x_n) \leq d(x, x_m) < \epsilon$$

(si noti che $x_m \wedge x_n = x_n$ per $n \leq m$, essendo la successione (x_n) crescente). Data l'arbitrarietà di $\epsilon > 0$, concludiamo $d(x \wedge x_n, x_n) = 0$, ossia $x_n \leq x$.

Nel caso di successioni decrescenti si ragiona in maniera analoga. □

Lemma 3.24. *Siano (x_n) e (y_n) due successioni in R con $x_n \leq y_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo esistano $x, y \in R$ tali che $x = \sup x_n$ e $y = \sup y_n$. Allora $x \leq y$.*

Proof. Dalla transitività della relazione d'ordine $\leq$ segue che y è maggiorante della successione (x_n) e quindi, per la Proposizione 3.22, che $x \leq y$. □

Lemma 3.25. *Siano (x_n) e (y_n) due successioni crescenti in R tali che $x_n = y_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora esiste $y := \sup y_n$ se e solo se esiste $x := \sup x_n$; in tal caso, $x = y$.*

Proof. Segue subito dal lemma precedente e dalla Proposizione 3.17. □

Data una successione (x_n) in R, per ogni $k \in \mathbb{N}$ indicheremo con $(x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ le successioni definite come segue:

$$x_n^k := x_{k+n}; \qquad a_n^k := \bigwedge_{i=k}^{k+n} x_i = \bigwedge_{i=0}^{n} x_i^k; \qquad b_n^k := \bigvee_{i=k}^{k+n} x_i = \bigvee_{i=0}^{n} x_i^k.$$

Chiaramente (vedere Lemma 3.13), per ogni $k \in \mathbb{N}$ le successioni $(a_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ sono, rispettivamente, decrescente e crescente.

Lemma 3.26. *Sia (x_n) una successione in R. Per ogni $k, n \in \mathbb{N}$ risultano*

$$a_{n+1}^k = x_k \wedge a_n^{k+1}; \qquad b_{n+1}^k = x_k \vee b_n^{k+1}.$$

Proof. Abbiamo infatti

$$a^k_{n+1} = (x_k \wedge \cdots \wedge x_{k+n}) \wedge x_{k+n+1} = x_k \wedge (x_{k+1} \wedge \cdots \wedge x_{k+n+1}) = x_k \wedge a^{k+1}_n.$$

Omettiamo la verifica della seconda parte dell'enunciato, del tutto analoga alla prima. □

Lemma 3.27. *Sia (x_n) una successione in R. Supponiamo che per ogni $k \in \mathbb{N}$ esistano, in quanto elementi di R, $\alpha^k := \inf_{n\in\mathbb{N}} a^k_n$ e $\beta^k := \sup_{n\in\mathbb{N}} b^k_n$. Allora (α^k) è una successione crescente, mentre (β^k) è una successione decrescente.*

Proof. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta, in virtù del Lemma 3.26,

$$a^k_{n+1} = x_k \wedge a^{k+1}_n \leq a^{k+1}_n;$$

perciò, grazie al Lemma 3.24, $\alpha^k := \inf_{n\in\mathbb{N}} a^k_n \leq \alpha^{k+1} := \inf_{n\in\mathbb{N}} a^{k+1}_n$. Questo dimostra che la successione (α^k) è crescente.

Il ragionamento per la successione (β^k) è simile al precedente. □

Conviene ora dare le definizioni di limite inferiore e limite superiore per successioni (non necessariamente monotone).

Definizione 3.28. *Sia (x_n) una successione in R. Supponiamo che per ogni $k \in \mathbb{N}$ esista $\alpha^k := \inf_{n\in\mathbb{N}} a^k_n$ e che esista $x := \sup_{k\in\mathbb{N}} \alpha^k$. Diciamo allora che x è limite inferiore per (x_n) e scriviamo $x = \liminf x_n$.*

Abbiamo già controllato che la successione a^k_n è decrescente per ogni k e che la successione α^k è crescente. Dunque la definizione è ben posta. Una defizione del tutto analoga vale per il limite superiore di una successione (x_n), $\limsup x_n$.

Definizione 3.29. *Sia (x_n) una successione e sia $x \in R$. Diciamo che x è il limite della successione (x_n) se esistono $y, z \in R$ tali che $y = \liminf x_n$, $z = \limsup x_n$, ed infine $x = y = z$.*

Per l'unicità del limite (nel senso semi-metrico), vale anche l'unicità del limite, nel senso appena introdotto; si ricordi Proposizione 3.20. Si osservi che, in generale, da $d(x_n, x) \to 0$ non è possibile dedurre $x = \lim x_n$. Tuttavia l'implicazione inversa vale, come dimostrato nel seguente teorema.

Teorema 3.30. *Sia (x_n) una successione in R e sia $x \in R$. Se $x = \lim x_n$, allora $d(x_n, x) \to 0$.*

Proof. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ siano α^n e β^n definiti come sopra. Risulta ovviamente $\alpha^n \leq x_n \leq \beta^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e, per ipotesi, $d(\alpha^n, x) \to 0$ e $d(\beta^n, x) \to 0$. Per il Teorema dei due Carabinieri, abbiamo allora $d(x_n, x) \to 0$, quanto si doveva mostrare. $\square$

Ovviamente, anche la completezza per spazi semi-metrici è di fondamentale importanza.

Definizione 3.31. *Diciamo che il reticolo semi-metrico $(R, \vee, \wedge, d)$ è* completo *se lo spazio semi-metrico (R, d) è completo (nel senso che ogni successione di Cauchy nella semi-metrica d converge).*

Si noti che la nozione di completezza appena introdotta fa *esclusivo* riferimento alla semi-metrica d in R. Diversamente, in letteratura per "reticolo completo" o "reticolo Dedekind completo" si intende un qualsiasi reticolo (non necessariamente semi-metrico) con la proprietà che ogni sottoinsieme superiormente (inferiormente) limitato ha estremo superiore (inferiore).

Teorema 3.32. *Siano R completo e (x_n) una successione crescente (decrescente) di Cauchy in R. Esiste allora $x \in R$ tale che $x = \sup x_n$ ($x = \inf x_n$).*

Proof. Poiché, per ipotesi, la successione (x_n) è di Cauchy ed il reticolo R è completo, esiste $x \in R$ tale che $d(x_n, x) \to 0$. Per il Lemma 3.23, $x = \sup x_n$ ($x = \inf x_n$). $\square$

3.3 Il teorema di Lebesgue

Occupiamoci adesso della versione costruttiva del teorema di Lebesgue nel contesto dei reticoli semi-metrici. Supponiamo dati due reticoli semi-metrici $(C, \vee, \wedge, d_C)$ e $(L, \vee, \wedge, d_L)$ (muniti, come sempre, delle relazioni d'ordine e d'equivalenza indotte) tali che:

1. $(C, \vee, \wedge, d_C)$ è completo;
2. $(C, \vee, \wedge, d_L)$ è sottoreticolo semi-metrico di $(L, \vee, \wedge, d_L)$;
3. in ogni intervallo $[a, b] \subseteq (C, \vee, \wedge, d_C)$, le due semi-metriche d_L e d_C sono equivalenti.

N.B.: per non appesantire (inutilmente) le notazioni, identifichiamo un dato elemento $x \in C$ con il suo "iniettato" in L. Analogamente, adottiamo gli stessi simboli $\vee, \wedge$ per denotare le (distinte) operazioni di reticolo in $(C, \vee, \wedge, d_C)$, $(C, \vee, \wedge, d_L)$ e $(L, \vee, \wedge, d_L)$. Usiamo i simboli $\leq_C, =_C$ per indicare le relazioni d'ordine e d'equivalenza indotte in $(C, \vee, \wedge, d_C)$, ed i simboli

$\leq_L, =_L$ per indicare le relazioni d'ordine e d'equivalenza in $(L, \vee, \wedge, d_L)$ o $(C, \vee, \wedge, d_L)$.

Ricordiamo che due semi-metriche d_1 e d_2 in un insieme X sono dette equivalenti se esistono due costanti positive k e K tali che $kd_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq Kd_1(x,y)$ per ogni $x, y \in X$. I seguenti lemmi sono ovvi.

Lemma 3.33. *Supponiamo che in ogni intervallo $[a,b]$ in $(C, \vee, \wedge, d_C)$ la semi-metrica d_C sia equivalente a d_L. Allora una successione (x_n) in $[a,b]$ è di Cauchy rispetto a d_C se e solo se è di Cauchy rispetto a d_L.*

Lemma 3.34. *Supponiamo che in ogni intervallo $[a,b]$ in $(C, \vee, \wedge, d_C)$ la semi-metrica d_C sia equivalente a d_L. Siano (x_n) una successione in $[a,b]$ e $x \in C \cap [a,b]$. Allora $d_C(x_n, x) \to 0$ se e solo se $d_L(x_n, x) \to 0$.*

Lemma 3.35. *Sia (x_n) una successione contenuta nell'intervallo $[a,b] \subseteq (C, \vee, \wedge, d_C)$. Sia $x \in C$ tale che $d_C(x_n, x) \to 0$. Allora $x \in [a,b]$.*

Proof. Supponiamo $x \wedge a \neq a$, ossia $d_C(x \wedge a, a) \geq \delta > 0$. Sia $n \in \mathbb{N}$ tale che $d_C(x_n, x) < \delta$. Abbiamo allora

$$d_C(x \wedge a, a) = d_C(x \wedge a, x_n \wedge a) \leq d_C(x, x_n) < \delta,$$

in contrasto con la nostra ipotesi. Questo prova $a \leq x$, ed analogamente si ragiona per dimostrare $x \leq b$. $\square$

Possiamo ora formulare e dimostrare il Teorema di Lebesgue.

Teorema 3.36. *Sia (x_n) successione limitata in $(C, \vee, \wedge, d_C)$. Supponiamo esista $y \in L$ tale che $y =_L \lim x_n$. Allora esiste $x \in C$ con $d_C(x_n, x) \to 0$ e $x =_L y$.*

Proof. Per il Teorema 3.30 $d_L(x_n, y) \to 0$ e quindi la successione (x_n) è di Cauchy in $(C, \vee, \wedge, d_L)$. Per ipotesi, in quanto contenuta in un intervallo del tipo $[a,b]$, la stessa successione (x_n) è di Cauchy anche in $(C, \vee, \wedge, d_C)$ per il Lemma 3.33. Inoltre, per la supposta completezza semi-metrica di $(C, \vee, \wedge, d_C)$, esiste $x \in C$ tale che $d_C(x_n, x) \to 0$. Il Lemma 3.35 ci dice che $x \in [a,b]$, da cui deduciamo $d_L(x_n, x) \to 0$ grazie al Lemma 3.34. Pertanto, per l'unicità del limite in $(L, \vee, \wedge, d_L)$, abbiamo $x =_L y$. $\square$

3.4 Un esempio

Evidentemente, la nostra versione costruttiva del teorema di Lebesgue (o, più precisamente, del suo immediato corollario) manca di un "esempio" concreto: è nostro obiettivo, in questa sezione, costruirne uno. Ancora una volta, lo spunto ci è fornito dal lavoro di Spitters. Egli confronta, in astratto, la convergenza rispetto a due metriche *distinte* ma *equivalenti quando ristrette agli intervalli*; una volta verificata l'equivalenza "locale" delle due metriche, a quel punto il teorema riesce una formalità. Tanto faremo noi.

Nel seguito faremo molto spesso uso degli elementi della cosiddetta "algebra dei limiti in $\mathbb{R}$", validi tanto per l'analisi classica quanto per quella costruttiva; questi saranno all'occorrenza indicati, tuttavia non ricavati rigorosamente (non è questa la sede, crediamo, per sviluppare compiutamente il calcolo dei limiti nel modello costruttivo dei reali).

Supponiamo dato un reticolo semi-metrico $(R, \vee, \wedge, d)$ con le ulteriori proprietà di essere distributivo e debolmente σ-limitato nel senso precisato dalle due definizioni sotto:

Definizione 3.37. *Un reticolo semi-metrico* $(R, \vee, \wedge, d)$ *è detto* distributivo *se per ogni* $x, y, z \in R$ *risulta*

$$d((x \vee y) \wedge z, (x \wedge z) \vee (y \wedge z)) = 0 = d((x \wedge y) \vee z, (x \vee z) \wedge (y \vee z)).$$

Definizione 3.38. *Diciamo che un reticolo semi-metrico* $(R, \vee, \wedge, d)$ *è* debolmente σ-limitato *se esistono una successione decrescente* (α_n) *ed una successione crescente* (β_n) *tali che per ogni* $x \in R$ *risulta*

$$d(x, ((x \wedge \beta_n) \vee \alpha_k)) \to 0.$$

Desideriamo notare che le due proprietà ora introdotte non sono affatto restrittive: per esempio, tanto lo spazio $C[0, 1]$ delle funzioni continue in $[0, 1]$ munito della metrica uniforme, quanto lo spazio $L^p[0, 1]$ ($p \in [1, \infty]$) delle funzioni p-integrabili in $[0, 1]$ munito della norma p-esima sono reticoli semi-metrici distributivi e debolmente σ-limitati. Non è esagerato dire che tutti i reticoli di interesse per il matematico analista hanno queste proprietà.

Ancora una osservazione sulla precedente definizione. In letteratura sono detti "σ-limitati" i reticoli $(R, \vee, \wedge)$ per i quali esistono una successione decrescente (α_n) e una successione crescente (β_n) tali che per ogni $x \in R$ risulta $\alpha_N \leq x \leq \beta_N$ per un qualche N naturale. È evidente che la richiesta imposta ora dalla definizione è più debole; da cui, l'avverbio "debolmente".

Definizione 3.39. *Sia* $(R, \vee, \wedge, d)$ *un reticolo semi-metrico distributivo e debolmente* σ*-limitato. Siano* (α_n) *e* (β_n) *successioni come in Definizione 3.38. Definiamo* $\tilde{d} : R \times R \to \mathbb{R}$ *come segue: per ogni* $x, y \in R$

$$\tilde{d}(x, y) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\min\{d((x \wedge \beta_n) \vee \alpha_n), (y \wedge \beta_n) \vee \alpha_n), 1\}}{2^{n+1}}.$$

Lemma 3.40. *Per ogni $x, y \in R$ risulta $\tilde{d}(x,y) \leq d(x,y)$.*

Proof. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta infatti

$$\min\{d((x\wedge\beta_n)\vee\alpha_n,(y\wedge\beta_n)\vee\alpha_n,1\} \leq d((x\wedge\beta_n)\vee\alpha_n,(y\wedge\beta_n)\vee\alpha_n) \leq d(x,y)$$

come diretta conseguenza degli stessi assiomi di reticolo semi-metrico. La conclusione ora deriva dall'uguaglianza $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 1$, valida anche costruttivamente. □

I lemmi che seguono riguardano proprietà (costruttive) dei numeri reali; ne omettiamo pertanto le dimostrazioni.

Lemma 3.41. *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ numeri non-negativi. Allora*

$$\min\{1,a\} \leq \min\{1,a+b\} \leq \min\{1,a\} + \min\{1,b\}.$$

Lemma 3.42. *Siano $(a_n), (b_n), (c_n)$ successioni di numeri reali non negativi tali che $a_n \leq b_n + c_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e tali che*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

esistano in $\mathbb{R}$. Allora $\sum_{n=0}^{\infty}(b_n + c_n)$ esiste in $\mathbb{R}$ e

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} (b_n + c_n).$$

Lemma 3.43. *La quaterna $(R, \vee, \wedge, \tilde{d})$ è dotata di una struttura di reticolo semi-metrico.*

Proof. Naturalmente, $\tilde{d}(x,y) \geq 0$ per ogni $x, y \in R$ in quanto sommatoria di addendi non negativi. Inoltre, l'uguaglianza $\tilde{d}(x,y) = \tilde{d}(y,x)$ per ogni $x, y \in R$ deriva direttamente dalla definizione di $\tilde{d}$ e dall'analoga uguaglianza $d(x,y) = d(y,x)$ valida per ogni $x, y \in R$.

Per dimostrare la disuguaglianza triangolare $\tilde{d}(x,z) \leq \tilde{d}(x,y) + \tilde{d}(y,z)$, ci basta osservare che in virtù del Lemma 3.41 e della disuguaglianza triangolare valida per d, risulta per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
&\min\{d((x \wedge \beta_n) \vee \alpha_n, (z \wedge \beta_n) \vee \alpha_n), 1\} \leq \\
&\min\{d((x \wedge \beta_n) \vee \alpha_n, (y \wedge \beta_n) \vee \alpha_n) + d((y \wedge \beta_n) \vee \alpha_n, (z \wedge \beta_n) \vee \alpha_n), 1\} \leq \\
&\min\{d((x \wedge \beta_n) \vee \alpha_n, (y \wedge \beta_n) \vee \alpha_n), 1\} + \\
&\min\{d((y \wedge \beta_n) \vee \alpha_n, (z \wedge \beta_n) \vee \alpha_n), 1\}.
\end{aligned}$$

Da qui, sfruttando il Lemma 3.42, la desiderata disuguaglianza triangolare per $\tilde{d}$. Con questo abbiamo mostrato che $\tilde{d}$ è una semi-metrica. Resta la verifica della necessaria compatibilità tra semi-metrica e struttura reticolare.

RIVEDERE La disuguaglianza

$$\tilde{d}(x \vee z, y \vee z) + \tilde{d}(x \wedge z, y \wedge z) \leq \tilde{d}(x, y)$$

deriva dalla seguente catena di disuguaglianze valide per ogni $n \in \mathbb{N}$ (si osservi che ora sfruttiamo l'ipotesi che il reticolo R è distributivo):

$$\begin{aligned}
&d((x \vee z) \vee \alpha_n, (y \vee z) \vee \alpha_n) + d((x \wedge z) \vee \alpha_n, (x \wedge z) \vee \alpha_n) = \\
&d((x \vee \alpha_n) \vee (z \vee \alpha_n), (y \vee \alpha_n) \vee (z \vee \alpha_n)) + \\
&d((x \vee \alpha_n) \wedge (z \vee \alpha_n), (y \vee \alpha_n) \wedge (z \vee \alpha_n)) \leq d((x \vee \alpha_n), (y \vee \alpha_n))
\end{aligned}$$

e, alla stessa maniera, dalla seguente:

$$\begin{aligned}
&d((x \vee z) \wedge \beta_n, (y \vee z) \wedge \beta_n) + d((x \wedge z) \wedge \beta_n, (x \wedge z) \wedge \beta_n) = \\
&d((x \wedge \beta_n) \vee (z \wedge \beta_n), (y \wedge \beta_n) \vee (z \wedge \beta_n)) + \\
&d((x \wedge \beta_n) \wedge (z \wedge \beta_n), (y \wedge \beta_n) \wedge (z \wedge \beta_n)) \leq d((x \wedge \beta_n), (y \wedge \beta_n)).
\end{aligned}$$

La dimostrazione è conclusa richiamando ancora il Lemma 3.42. □

Il seguente risultato è molto importante in quanto apre al Teorema 3.45 che stabilisce l'equivalenza, limitatamente ai sottinsiemi di R della forma $[a, b]$, delle due metriche d e $\tilde{d}$ (tali sottinsiemi sono tradizionalmente, e per ovvi motivi, detti "intervalli"; ricordiamo tuttavia che la relazione d'ordine in R non è, salvo casi particolari, lineare).

Lemma 3.44. *Siano $a, b \in R$ con $a \leq b$. Per ogni $\epsilon > 0$ esistono $\delta > 0$ e $K > 0$ tale che $d(x, y) \leq \epsilon + K\tilde{d}(x, y)$ per ogni $x, y \in [a, b]$ con $\tilde{d}(x, y) \leq \delta$.*

Proof. Fissiamo $\epsilon > 0$. Sia $k \in \mathbb{N}$ tale che

$$\max\{d(a \vee \alpha_k, a), d(a \wedge \beta_k, a), d(b \vee \alpha_k, b), d(b \wedge \beta_k, b)\} \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Poniamo

$$K := 2^{k+1}; \qquad \delta := 1/4K.$$

Risulta, per ogni $x, y \in [a, b]$ (di seguito omettiamo molte, inutili, parentesi: la proprietà associativa delle operazioni $\vee, \wedge$ in R e della somma in $\mathbb{R}$ sono appurate)

$$
\begin{aligned}
&2d(x,y) = d(x,y) + d(x,y) \leq \\
&d(x, x \vee \alpha_k) + d(x \vee \alpha_k, y \vee \alpha_k) + d(y \vee \alpha_k, y) + \\
&d(x, x \wedge \beta_k) + d(x \wedge \beta_k, y \wedge \beta_k) + d(y \wedge \beta_k, y) = \\
&d(a \vee x, a \vee x \vee \alpha_k) + d(a \vee y, a \vee y \vee \alpha_k) + d(x \vee \alpha_k, y \vee \alpha_k) + \\
&d(x \wedge b \wedge \beta_k, x \wedge b) + d(y \wedge b, y \wedge b \wedge \beta_k) + d(x \wedge k, y \wedge \beta_k) \leq \\
&\frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} + d(x \vee \alpha_k, y \vee \alpha_k) + d(x \wedge \beta_k, y \wedge \beta_k) = \\
&2\epsilon + d(x \vee \alpha_k, y \vee \alpha_k) + d(x \wedge \beta_k, y \wedge \beta_k).
\end{aligned}
$$

Ora, se $\tilde{d}(x,y) \leq \delta = \frac{1}{2^{k+3}}$, allora $d(x \vee \alpha_k, y \vee \alpha_k) + d(x \wedge \beta_k, y \wedge \beta_k) \leq 1$ (in caso contrario, infatti, risulterebbe

$$\tilde{d}(x,y) \geq \frac{1}{2}\frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^{k+2}} > \frac{1}{2^{k+3}},$$

il che contrasta con l'ipotesi) e quindi

$$
\begin{aligned}
&\tilde{d}(x,y) \geq \frac{1}{2}\frac{1}{2^{k+1}}(d(x \vee \alpha_k, y \vee \alpha_k) + d(x \wedge \beta_k, y \wedge \beta_k)) = \\
&\frac{1}{2K}(d(x \vee \alpha_k, y \vee \alpha_k) + d(x \wedge \beta_k, y \wedge \beta_k)),
\end{aligned}
$$

da cui, moltiplicando per $2K$,

$$d(x \vee \alpha_k, y \vee \alpha_k) + d(x \wedge \beta_k, y \wedge \beta_k) \leq 2K\tilde{d}(x,y).$$

In definitiva, combinando le precedenti disuguaglianze, per ogni $x, y \in [a,b]$ con $\tilde{d}(x,y) \leq \delta$ abbiamo

$$d(x,y) \leq \epsilon + K\tilde{d}(x,y),$$

ossia la tesi. □

Il teorema seguente stabilisce l'equivalenza tra le due metriche d e $\tilde{d}$, quando *ristrette* agli intervalli in R.

Teorema 3.45. *Sia $(R, \vee, \wedge, d)$ un reticolo semi-metrico distributivo e debolmente σ-limitato. Siano $a, b \in R$ tali che $a \leq b$. Allora una successione (x_n) in $[a,b]$ è di Cauchy in $(R, \vee, \wedge, d)$ se e solo se lo è in $(R, \vee, \wedge, \tilde{d})$.*

Proof. Una implicazione è ovvia, in quanto $\tilde{d}(x,y) \leq d(x,y)$ per ogni $x, y \in R$ (Lemma 3.40).

Proviamo l'altra implicazione. Fissiamo $\epsilon > 0$ e siano δ e K come in Lemma 3.44. Per ipotesi esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n, m \geq N$, risulta $\tilde{d}(x_n, x_m) \leq \min\{\delta, \frac{\epsilon}{K}\}$. Quindi, in virtù del Lemma 3.44, per ogni $n, m \geq N$ vale

$$d(x_n, x_m) \leq \epsilon + K\tilde{d}(x_n, x_m) \leq \epsilon + K \cdot \frac{\delta}{K} = 2\epsilon.$$

Ciò conclude la dimostrazione, data l'arbitrarietà di $\epsilon > 0$. $\square$

Il Teorema 3.45 chiude idealmente la prima parte: in R disponiamo ora di due diverse semi-metriche, e tuttavia essenzialmente uguali in opportuni sottinsiemi. Non avendo imposto alcuna proprietà di completezza su $(R, \vee, \wedge, d)$, dobbiamo ora "completare" il nostro reticolo (secondo una procedura assolutamente standard in analisi matematica).

Definizione 3.46. *Indichiamo con (C, d_C) il completamento dello spazio semi-metrico (R, d).*

Ricordiamo che il completamento (C, d_C) di uno spazio semi-metrico (R, d) consta di tutte le successioni (x_n) ad elementi in R che sono di Cauchy rispetto alla semi-metrica d. Tale insieme C risulta uno spazio semi-metrico *completo*, quando equipaggiato della semi-metrica d_C definita ponendo

$$d_C((x_n), (y_n)) := \lim d(x_n, y_n).$$

In Sezione 3.6 illustreremo un poco più dettagliatamente la costruzione del completamento di uno spazio semi-metrico dato.

Definizione 3.47. *Indichiamo con (L, d_L) il completamento dello spazio semi-metrico $(R, \tilde{d})$.*

È importante notare che dal Lemma 3.40 deriva che C è un sottoinsieme di L (più precisamente, è identificabile come sottinsieme di L): banalmente, ogni successione di Cauchy in d lo è pure in $\tilde{d}$. D'ora innanzi *identificheremo* C come sottoinsieme di L.

Lemma 3.48. *Per ogni $x, y \in C$, risulta $d_L(x,y) \leq d_C(x,y)$.*

Proof. Segue immediatamente dal Lemma 3.40. Siano infatti (x_n) e (y_n) due elementi di C. Essendo $\tilde{d}(x_n, y_n) \leq d(x_n, y_n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, riesce

$$d_L(x,y) := \lim \tilde{d}(x_n, y_n) \leq \lim d(x_n, y_n) =: d_C(x,y),$$

precisamente quanto si doveva verificare (abbiamo sfruttato, qui, il seguente fatto valido nei reali costruttivi: se (r_n) e (s_n) sono due successioni convergenti in $\mathbb{R}$ e se $r_n \leq s_n$ per ogni n, allora $\lim r_n \leq \lim s_n$). $\square$

Le strutture di spazio semi-metrico (C, d_C) e (L, d_L) mancano ancora delle necessarie operazioni di reticolo. Le ovvie operazioni di reticolo in esse, indotte dalle operazioni $\vee, \wedge$ in R, sono le seguenti:

Definizione 3.49. *Siano $x = (x_n)$ e $y = (y_n)$ due elementi di L (di C). Poniamo $x \vee y := (x_n \vee y_n)$ e $x \wedge y := (x_n \wedge y_n)$.*

Le definizioni appena date sono tanto naturali quanto per noi utili, come emerge dal seguente teorema.

Teorema 3.50. *Le operazioni $\vee$ e $\wedge$ sono bene definite sia in L che in C. Le strutture $(C, \vee, \wedge, d_C)$ e $(L, \vee, \wedge, d_L)$ sono di reticolo semi-metrico completo. Inoltre, $(C, \vee, \wedge, d_L)$ è un sottoreticolo semi-metrico di $(L, \vee, \wedge, d_L)$.*

Proof. Siano (x_n) e (y_n) due successioni di Cauchy in $(R, \vee, \wedge, \tilde{d})$. Per ogni $n, m \in \mathbb{N}$ risulta

$$\tilde{d}(x_n \vee y_n, x_m \vee y_m) \leq \tilde{d}(x_n \vee y_n, x_m \vee y_n) + \tilde{d}(x_m \vee y_n, x_m \vee y_m) \leq$$
$$\tilde{d}(x_n, x_m) + \tilde{d}(y_n, y_m);$$

pertanto, anche la successione $(x_n \vee y_n)$ è di Cauchy in $(R, \vee, \wedge, \tilde{d})$. Analogamente si ragiona per l'operazione $\wedge$. Con questo abbiamo verificato la sensatezza delle operazioni $\vee, \wedge$ in (L, d_L).

Dalla disuguaglianza

$$\tilde{d}(x_n \vee z_n, y_n \vee z_n) + \tilde{d}(x_n \wedge z_n, y_n \wedge z_n) \leq \tilde{d}(x_n, y_n),$$

valida per ogni $n \in \mathbb{N}$ in quanto diretta conseguenza dell'analoga per d, segue mediante passaggio al limite (anche in analisi matematica costruttiva le disuguaglianze si conservano "passando al limite")

$$d_L(x \vee z, y \vee z) + d_L(x \wedge z, y \wedge z) \leq d_L(x, y):$$

con ciò è provato per $(L, \vee, \wedge, d_L)$ l'assioma 5. La verifica dei rimanenti assiomi è davvero immediata.

Per dimostrare che $(C, \vee, \wedge, d_C)$ è un reticolo semi-metrico, basta a questo punto semplicemente rimpiazzare $\tilde{d}$ con d nel corso della dimostrazione appena fornita. □

Avendo constatato che i due reticoli $(C, \vee, \wedge, d_C)$ e $(L, \vee, \wedge, d_L)$ sono semi-metrici, li supporremo d'ora innanzi muniti delle relazioni d'ordine e d'uguaglianza ad essi naturalmente associate.

Il reticolo $(C, \vee, \wedge, d_C)$ eredita da $(R, \vee, \wedge, d)$ la proprietà di essere debolmente σ-limitato:

Teorema 3.51. *Il reticolo $(C, \vee, \wedge, d_C)$ è debolmente σ-limitato.*

Proof. Sia $(x_n) \in C$ (i.e., sia (x_n) una successione di Cauchy in $(R, \vee, \wedge, d)$) e siano le successioni (α_k) e (β_k) definite come in Definizione 3.38. Per ogni $\epsilon > 0$ sia $N \in \mathbb{N}$ tale che $d(x_n, x_m) \leq \frac{\epsilon}{6}$ per ogni $n, m \geq N$. Sia poi $k \in \mathbb{N}$ tale che

$$d(x_N \vee \alpha_k, x_N) + d(x_N \wedge \beta_k, x_N) \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

Allora, per ogni $n \geq N$ abbiamo

$$\begin{aligned}
&d(x_n \vee \alpha_k, x_n) + d(x_n \wedge \beta_k, x_n) \leq \\
&d(x_n, x_N) + d(x_N, x_N \vee \alpha_k) + d(x_N \vee \alpha_k, x_n \vee \alpha_k) + \\
&d(x_n, x_N) + d(x_N, x_N \wedge \beta_k) + d(x_N \wedge \beta_k, x_n \wedge \beta_k) \leq \\
&\frac{\epsilon}{6} + \frac{\epsilon}{6} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{6} + \frac{\epsilon}{6} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Concludiamo che

$$d_C((x_n) \vee (\alpha_k)_{n \in \mathbb{N}}, (x_n)) + d_C((x_n) \wedge (\beta_k)_{n \in \mathbb{N}}, (x_n)) \leq \epsilon,$$

avendo usato il seguente fatto valido nei reali costruttivi: se (r_n) è una successione convergente in $\mathbb{R}$, e se $r_n \leq \epsilon$ definitivamente, allora $\lim_{n \to \infty} r_n \leq \epsilon$. La dimostrazione è conclusa. $\square$

È facile verificare che il reticolo $(C, \vee, \wedge, d_C)$ eredita da $(R, \vee, \wedge, d)$ anche la proprietà di essere distributivo; di questo, comunque, non avremo bisogno.

Passiamo piuttosto alla necessaria verifica che $(C, \vee, \wedge, d_C)$ è "immerso" in $(L, \vee, \wedge, d_L)$. La dimostrazione del lemma seguente è pressochè identica a quella del Lemma 3.44: la riportiamo per completezza.

Lemma 3.52. *Siano $a, b \in C$ con $a \leq_C b$. Per ogni $\epsilon > 0$ esistono $\delta > 0$ e $K > 0$ tali che $d_C(x, y) \leq \epsilon + K d_L(x, y)$ per ogni $x, y \in C \cap [a, b]$ con $d_L(x, y) \leq \delta$.*

Proof. Fissiamo ad arbitrio $\epsilon > 0$. Sia $k \in \mathbb{N}$ tale che

$$d_C(a \vee (\alpha_k)_{n \in \mathbb{N}}, a) < \frac{\epsilon}{2}; \qquad d_C(b \wedge (\beta_k)_{n \in \mathbb{N}}, b) < \frac{\epsilon}{2}$$

(tale k effettivamente esiste, vedere la dimostrazione del Teorema 3.51). Poniamo

$$K := 2^{k+1}; \qquad \delta := 1/4K.$$

Per ogni $x, y \in [a, b]$ si ha

$$\begin{aligned}
&2d_C(x, y) = d_C(x, y) + d_C(x, y) \leq \\
&d_C(x, x \vee (\alpha_k)_{n\in\mathbb{N}}) + d_C(x \vee (\alpha_k)_{n\in\mathbb{N}}, y \vee (\alpha_k)_{n\in\mathbb{N}}) + d_C(y \vee (\alpha_k)_{n\in\mathbb{N}}, y) + \\
&d_C(x, x \wedge (\beta_k)_{n\in\mathbb{N}}) + d_C(x \wedge (\beta_k)_{n\in\mathbb{N}}, y \wedge (\beta_k)_{n\in\mathbb{N}}) + d_C(y \wedge (\beta_k)_{n\in\mathbb{N}}, y) = \\
&d_C(a \vee x, a \vee x \vee (\alpha_k)_{n\in\mathbb{N}}) + d_C(x \vee (\alpha_k)_{n\in\mathbb{N}}, y \vee (\alpha_k)_{n\in\mathbb{N}}) + \\
&d_C(x \wedge (\beta_k)_{n\in\mathbb{N}}, y \wedge (\beta_k)_{n\in\mathbb{N}}) + d_C(a \vee y, a \vee y \vee (\alpha_k)_{n\in\mathbb{N}}) + \\
&d_C(x \wedge b \wedge (\beta_k)_{n\in\mathbb{N}}, x \wedge b) + d_C(y \wedge b, y \wedge b \wedge (\beta_k)_{n\in\mathbb{N}}) \leq \\
&2\epsilon + d_C(x \wedge (\beta_k)_{n\in\mathbb{N}}, y \wedge (\beta_k)_{n\in\mathbb{N}}) + d_C(x \vee (\alpha_k)_{n\in\mathbb{N}}, y \vee (\alpha_k)_{n\in\mathbb{N}}).
\end{aligned}$$

Se $d_L(x, y) \leq \delta = \frac{1}{2^{k+3}}$, allora $\tilde{d}(x_n, y_n) < \frac{1}{2K}$ per tutti gli $n \in \mathbb{N}$ sufficientemente grandi. Ne deriva che per tali n naturali,

$$d(x_n \vee \alpha_k, y_n \vee \alpha_k) + d(x_n \wedge \beta_k, y_n \wedge \beta_k) \leq 1;$$

quindi

$$\begin{aligned}
&\tilde{d}(x_n, y_n) \geq \frac{1}{2}\frac{1}{2^{k+1}}(d(x_n \vee \alpha_k, y_n \vee \alpha_k) + d(x_n \wedge \beta_k, y_n \wedge \beta_k)) = \\
&\frac{1}{2K}(d(x_n \vee \alpha_k, y_n \vee \alpha_k) + d(x_n \wedge \beta_k, y_n \wedge \beta_k)),
\end{aligned}$$

da cui

$$d(x_n \vee \alpha_k, y_n \vee \alpha_k) + d(x_n \wedge \beta_k, y_n \wedge \beta_k) \leq 2K\tilde{d}(x_n, y_n).$$

Passando al limite per $n \to \infty$ la disuguaglianza si conserva:

$$d_C(x \vee (\alpha_k)_{n\in\mathbb{N}}, y \vee (\alpha_k)_{n\in\mathbb{N}}) + d_C(x \wedge (\beta_k)_{n\in\mathbb{N}}, y \wedge (\beta_k)_{n\in\mathbb{N}}) \leq K d_L(x, y).$$

In conclusione: per ogni $x, y \in [a, b]$ con $d_L(x, y) \leq \delta$ abbiamo

$$d_C(x, y) \leq \epsilon + K d_L(x, y),$$

e la dimostrazione è completa. □

Il teorema seguente è l'esatto analogo del Teorema 3.45.

Teorema 3.53. *Siano $a, b \in C$ tali che $a \leq_C b$ e sia (x_n) una successione in $C \cap [a, b]$. Allora (x_n) è di Cauchy in $(C, \vee, \wedge, d_C)$ se e solo se lo è in $(C, \vee, \wedge, d_L)$.*

Proof. Una implicazione deriva immediatamente dal Lemma 3.48. L'altra è conseguenza del precedente lemma (si ragiona esattamente come in Teorema 3.45). □

Avendo ora constatato che nel reticolo $(C, \vee, \wedge)$ le due metriche d_C e d_L indotte rispettivamente da d e $\tilde{d}$ sono equivalenti quando ristrette ai suoi intervalli, ci resta poco per dimostrare che $(C, \vee, \wedge, d_C)$ è reticolo semi-metrico immerso in $(L, \vee, \wedge, d_L)$.

Proposizione 3.54. *Siano $x = (x_n)$ e $y = (y_n)$ in C. Allora $x =_L y$ se e solo se $x =_C y$.*

Proof. Una implicazione è ovvia, in quanto $d_L(x, y) \leq d_C(x, y)$ per ogni $x, y \in C$.

Quanto all'opposta, supponiamo $d_L(x, y) = 0$ e $d_C(x, y) > \delta > 0$. Siano $k, N \in \mathbb{N}$ tali che per ogni $n \geq N$

$$\max\{d(x_n, x_n \wedge \beta_k), d(y_n, y_n \wedge \beta_k), d(x_n \wedge \beta_k, y_n \wedge \beta_k)\} \leq \frac{\delta}{3}$$

(l'esistenza di siffatti k, N essendoci garantita dal Teorema 3.51 e, naturalmente, dall'ipotesi che (x_n) e (y_n) sono di Cauchy rispetto alla semi-metrica d). Ne segue

$$\max\{d_C(x, x \wedge (\beta_k)_{n\in\mathbb{N}}), d_C(y, y \wedge (\beta_k)_{n\in\mathbb{N}}), d_C(x \wedge (\beta_k)_{n\in\mathbb{N}}, y \wedge (\beta_k)_{n\in\mathbb{N}})\} \leq \frac{\delta}{3}$$

e quindi

$$\begin{aligned} &d_C(x, y) \leq d_C(x, x \wedge (\beta_k)_{n\in\mathbb{N}}) + d_C(x \wedge (\beta_k)_{n\in\mathbb{N}}, y \wedge (\beta_k)_{n\in\mathbb{N}}) + \\ &d_C(y, y \wedge (\beta_k)_{n\in\mathbb{N}}) \leq \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} = \delta, \end{aligned}$$

in contrasto con l'ipotesi. □

Corollario 3.55. *Siano $x, y \in C$. Allora $x \leq_C y$ se e solo se $x \leq_L y$.*

Proof. Deriva dalla precedente proposizione, osservando che $x \leq_C y$ se e solo se $x \wedge y =_C x$, e che $x \leq_L y$ se e solo se $x \wedge y =_L x$. □

Corollario 3.56. *Sia (x_n) una successione crescente in C e sia $x \in C$. Allora $x =_C \sup x_n$ se e solo se $x =_L \sup x_n$. Analoga affermazione vale per una successione decrescente in C.*

Proof. Si osservi anzitutto che per il Corollario 3.55 la successione è crescente sia in $(C, \vee, \wedge, d_C)$ che in $(C, \vee, \wedge, d_L)$ (non vi è quindi ambiguità nell'enunciato del corollario).

Se $x =_C \sup x_n$, per definizione abbiamo allora $d_C(x_n, x) \to 0$ e quindi $d_L(x_n, x) \to 0$ (vedere Lemma 3.48). Di conseguenza, $x =_L \sup x_n$ per il Lemma 3.23.

Viceversa, supponiamo $x =_L \sup x_n$. Allora $d_L(x_n, x) \to 0$ e quindi la successione (x_n) è di Cauchy in d_L (vedere Proposizione 3.18). Per il Teorema 3.53, la successione (x_n) è di Cauchy anche in d_C; pertanto, in virtù della completezza di $(C, \vee, \wedge, d_C)$, esiste $y \in C$ tale che $d_C(x_n, y) \to 0$. Segue $d_L(x_n, y) \to 0$ (ancora per il Lemma 3.48) e poi $x =_L y$ per l'unicità del limite (Proposizione 3.17). L'uguaglianza $x =_C y$ deriva dalla Proposizione 3.54. □

La costruzione di un esempio "concreto" per la nostra versione, reticolare e costruttiva insieme, del teorema di Lebesgue è finalmente completata. Desideriamo concludere osservando che la costruzione astratta dedotta in questa sezione altro non è che la generalizzazione della ben nota costruzione delle funzioni misurabili ed integrabili in $[0, 1]$ a partire dalle funzioni semplici (a gradino). Vediamo più in dettaglio come.

Si consideri il reticolo semi-metrico $(R, \vee, \wedge, d)$ delle funzioni reali semplici definite nell'intervallo $[0, 1]$, ove le operazioni di reticolo $\vee, \wedge$ sono definite puntualmente e d è l'usuale semi-metrica (di più, semi-norma)

$$d(f, g) := \int_0^1 |f - g|.$$

Si verifica senza difficoltà che $(R, \vee, \wedge, d)$ è distributivo e debolmente σ-limitato (di più, σ-limitato) nel senso della Definizione 3.38 (si considerino, per esempio, le successioni $(-\mathbf{n})_{n\in\mathbb{N}}$ e $(\mathbf{n})_{n\in\mathbb{N}}$, ove $\mathbf{n}$ denota la funzione in $[0, 1]$ costantemente uguale a n). Indicata con $\tilde{d}$ la semi-metrica in R definita ponendo, per ogni $f, g \in R$,

$$\tilde{d}(f, g) := \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\min\{\int_0^1 |((f \wedge \mathbf{n}) \vee (-\mathbf{n})) - ((\mathbf{g} \wedge \mathbf{n}) \vee (-\mathbf{n}))|, \mathbf{1}\}}{2^{n+1}},$$

la quaterna $(R, \vee, \wedge, \tilde{d})$ risulta munita di una struttura di reticolo semi-metrico.

Ebbene, come ben noto in Analisi Reale il completamento $(C, \vee \wedge, d_C)$ di $(R, \vee, \wedge, d)$ è precisamente il reticolo delle funzioni sommabili (integrabili) in $[0, 1]$ e d_C la semi-metrica "forte". Quanto al completamento $(L, \vee, \wedge, d_L)$ di $(R, \vee, \wedge, \tilde{d})$, esso consta delle funzioni misurabili in $[0, 1]$; la convergenza in d_L risulta essere l'altrettanto nota convergenza in misura.

Abbiamo in diversi punti riconosciuto l'analogia tra il nostro lavoro e quello di Spitters. Desideriamo, in ultimo, rimarcare le differenze a nostro giudizio più significative.

La prima. Come già spiegato nella sezione introduttiva, la "sostanza" del Teorema di Lebesgue sta nel confronto: convergenza nel senso dell'ordine vs convergenza nel senso della (semi-)metrica. La nostra trattazione, in quanto sviluppata nell'ambito dei reticoli semi-metrici, coglie maggiormente l'essenza del Teorema della Convergenza Dominata in quanto richiede meno "struttura". Al contrario, gli argomenti di Spitters (in buona sostanza basati sulla trattazione di Fremlin [7]) richiedono un vasto apparato teorico (certamente necessario per la teoria generale dell'integrazione, ma non nel caso specifico). Il punto di partenza di Spitters, infatti, è quello di una "integration f-algebra": uno spazio di Riesz archimedeo $(R, \vee, \wedge)$, munito di una moltiplicazione interna $\times$ con elemento neutro $\mathbf{1}$ (naturalmente, l'operazione $\times$ è "compatibile" con la struttura di L come spazio di Riesz) e di un funzionale lineare continuo (integrale) $\int$.

La seconda. Nell'enunciato del teorema di Lebesgue, come appare nell'articolo di Spitters, non vi è riferimento alla convergenza nel senso dell'ordine (si tratta, invero, del confronto tra due distinte nozioni di convergenza *metrica*, precisamente in norma ed in misura, che risultano equivalenti per sottinsiemi limitati). La nozione di limite introdotta nel nostro rapporto (vedere Definizione **??**) e riproposta nell'enunciato del Teorema 3.36, si riferisce alla relazione d'ordine $\leq$ indotta in modo naturale dalla struttura di reticolo semi-metrico. L'importante confronto tra le due distinte relazioni d'ordine $\leq_C, \leq_L$ viene affrontato nella nostra trattazione (pure se, va ancora una volta riconosciuto, tali relazioni d'ordine dipendono strettamente dalle due semimetriche d e $\tilde{d}$); al contrario, è omesso nel lavoro di Spitters.

3.5 Reticolo valutato (costruttivo)

Ci prefiggiamo in questa sezione di dimostrare che i reticoli valutati (nel senso costruttivo precisato di seguito) costituiscono importanti esempi di reticoli semi-metrici (per essi dunque, si applica la teoria precedentemente sviluppata).

Per *reticolo valutato (costruttivo)* intendiamo una struttura $(R, \vee, \wedge, \mu)$, dove: R è un insieme non vuoto; le applicazioni $\vee, \wedge : R \times R \to R$ ed il funzionale $\mu : R \to \mathbb{R}$ soddisfano le seguenti proprietà: per ogni $a, b, c \in R$

1. $\mu(a \vee a) = \mu(a) = \mu(a \wedge a)$;
2. $\mu(a \vee b) = \mu(b \vee a); \qquad \mu(a \wedge b) = \mu(b \wedge a)$;
3. $\mu((a \vee b) \vee c) = \mu(a \vee (b \vee c)); \qquad \mu((a \wedge b) \wedge c) = \mu(a \wedge (b \wedge c))$;
4. $\mu(a \vee (a \wedge b)) = \mu(a) = \mu(a \wedge (a \vee b))$;
5. $\mu(a \vee b) + \mu(a \wedge b) = \mu(a) + \mu(b)$;

6. $\mu(a \vee (b \wedge c)) \leq \mu(a \vee b)$; $\qquad \mu(a \wedge (b \vee c)) \geq \mu(a \wedge b)$.

I seguenti fatti derivano immediatamente dagli assiomi elencati sopra:

Lemma 3.57. *Per ogni $a, b, c, \in R$ risulta $\mu(a \vee (b \wedge c)) \leq \mu(a \vee c)$. Dualmente, $\mu(a \wedge (b \vee c)) \geq \mu(a \wedge c)$.*

Proof. Risulta infatti (applicando, per semplicità, molto "liberamente" la proprietà associativa della somma nel modello costruttivo dei reali)

$$\begin{aligned}
&\mu(a \wedge (b \vee c)) = \mu(a) + \mu(b) + \mu(c) - \mu(b \wedge c) - \mu(c \vee (a \vee b)) = \\
&\mu(a) + \mu(b) + \mu(c) - \mu(b \wedge c) - \mu((c \vee a) \vee b) = \\
&\mu(a) + \mu(b) + \mu(c) - \mu(b \wedge c) - \mu(c \vee a) - \mu(b) + \mu(b \wedge (c \vee a)) \geq \\
&\mu(a \wedge c) - \mu(b \wedge c) + \mu(b \wedge c) = \mu(a \wedge c).
\end{aligned}$$

L'altro caso si tratta in modo analogo. □

Lemma 3.58. *Per ogni $a, b \in R$ risulta*

$$\mu(a \wedge b) \leq \min\{\mu(a), \mu(b)\} \leq \max\{\mu(a), \mu(b)\} \leq \mu(a \vee b).$$

Proof. In virtù del Lemma 3.57 si ha $\mu(a) = \mu(a \vee (a \wedge b)) \leq \mu(a \vee b)$ ed anche $\mu(b) = \mu(b \vee (b \wedge a)) \leq \mu(b \vee a) = \mu(a \vee b)$. Ciò mostra $\max\{\mu(a), \mu(b)\} \leq \mu(a \vee b)$. Il resto si verifica ragionando per dualità. □

Definizione 3.59. *Siano $a, b \in R$. Diciamo che $a \neq b$ se*

$$d(a, b) := \mu(a \vee b) - \mu(a \wedge b) > 0.$$

Poniamo inoltre $a = b$ qualora $\neg(a \neq b)$ o, equivalentemente, $\mu(a \vee b) = \mu(a \wedge b)$ $(= \mu(a) = \mu(b))$.

Non siamo al momento nella condizione di mostrare che la mappa d sopra definita è effettivamente una semi-metrica. Lo saremo, più avanti.

È facile constatare che la relazione $\neq$ è anti-riflessiva e simmetrica, dunque che la relazione $=$ è riflessiva e simmetrica.

Definizione 3.60. *Siano $a, b \in R$. Diciamo che $a \not\leq b$ se $a \neq a \wedge b$ o, equivalentemente, se $a \vee b \neq b$. Definiamo poi $a \leq b$ se $\neg(a \not\leq b)$.*

Si osservi che $a \leq b$ se e solo se $\mu(a \wedge b) = \mu(a)$ (se e solo se $\mu(a \vee b) = \mu(b)$).

Proposizione 3.61. *La relazione $\leq$ è una relazione d'ordine parziale.*

Proof. Chiaramente $\leq$ è riflessiva. Mostriamo che $\leq$ è transitiva. Siano $a \leq b$ e $b \leq c$. Per i Lemmi 3.57 e 3.58 si ha

$$\mu(a \wedge c) \geq \mu((a \wedge c) \wedge b) = \mu(a \wedge (c \wedge b)) =$$
$$\mu(a) + \mu(b) - \mu(a \vee (c \wedge b)) \geq \mu(a) + \mu(b) - \mu(a \vee b) = \mu(a).$$

Essendo la disuguaglianza $\mu(a \wedge c) \leq \mu(a)$ sempre vera (ancora per il Lemma 3.58), concludiamo $\mu(a \wedge c) = \mu(a)$, ossia $a \leq c$. □

Corollario 3.62. *La relazione $=$ è una relazione di equivalenza.*

Proof. Combinare la proposizione precedente e l'osservazione che, nel reticolo R, vale la coimplicazione $a = b$ se e solamente se $a \leq b$ e $b \leq a$ (poiché vale la medesima coimplicazione nel modello costruttivo di $\mathbb{R}$). □

Lemma 3.63. *Siano $a, b, c \in R$ tali che $a \leq b \leq c$. Allora $\mu(a) \leq \mu(c)$ e $d(a, c) = d(a, b) + d(b, c)$.*

Proof. Per l'ipotesi ed il Lemma 3.58

$$\mu(a) \leq \mu(a \vee b) = \mu(b) \leq \mu(b \vee c) = \mu(c).$$

Inoltre,

$$d(a, c) = \mu(a \vee c) - \mu(a \wedge c) = \mu(c) - \mu(a) =$$
$$\mu(c) - \mu(b) + \mu(b) - \mu(a) = d(a, b) + d(b, c),$$

cioè la tesi. □

Ci piace segnalare ancora l'importanza che la mappa d si "spezzi additivamente" sulle catene, fatto assicuratoci, fondamentalmente, dalle proprietà modulari della funzione μ.

Lemma 3.64. *Siano $a, b, c \in R$ tali che $a \leq b$ e $c \leq b$. Allora $a \vee c \leq b$. Dualmente, se $a \leq b$ e $a \leq c$ allora $a \leq b \wedge c$.*

Proof. $\mu(b \wedge (a \vee c)) \leq \mu(a \vee c)$ per il Lemma 3.58. Inoltre,

$$\mu(b \wedge (a \vee c) = \mu(b) + \mu(a \vee c) - \mu(b \vee a) \vee c)) =$$
$$\mu(b) + \mu(a \vee c) - \mu(b \vee a) - \mu(c) + \mu((b \vee a) \wedge c) \geq$$
$$\mu(b) + \mu(a \vee c) - \mu(b) - \mu(c) + \mu(c \wedge b) = \mu(a \vee c).$$

Pertanto, $\mu(b \wedge (a \vee c)) = \mu(a \vee c)$, quindi $a \vee c \leq b$. □

Lemma 3.65. *Siano $a, b \in R$. Allora $a \wedge b \leq a \leq a \vee b$ e $a \wedge b \leq b \leq a \vee b$.*

Proof. Immediata: $\mu(a \wedge (a \vee b)) = \mu(a) = \mu(a \vee (a \wedge b))$. Inoltre, sfruttando il Lemma 3.58 ricaviamo $\mu((a \wedge b) \vee b) = \mu(b \vee b) = \mu(b)$ e $\mu((a \vee b) \wedge b) = \mu(b \wedge b) = \mu(b)$. $\square$

Lemma 3.66. *Siano $a, b, c, d \in R$. Se $a \leq c$ e $b \leq d$ allora $a \vee b \leq c \vee d$ e $a \wedge b \leq c \wedge d$.*

Proof. Per la Proposizione 3.61 ed il Lemma 3.65 abbiamo $a \leq c \leq c \vee d$ e $b \leq d \leq c \vee d$; dunque $a \vee b \leq c \vee d$, grazie al Lemma 3.64. Analogamente, $a \wedge b \leq a \leq c$ e $a \wedge b \leq b \leq d$ implicano $a \wedge b \leq c \wedge d$. $\square$

Lemma 3.67. *Per ogni $a, b \in R$ risulta $a \vee b = b \vee a$ e $a \wedge b = b \wedge a$.*

Proof. $a \leq b \vee a$ e $b \leq b \vee a$ per il Lemma 3.65. Quindi, per il Lemma 3.64, $a \vee b \leq b \vee a$. Allo stesso modo si verifica che $b \vee a \leq a \vee b$. $\square$

Lemma 3.68. *Per ogni $a \in R$ si ha $a = a \wedge a$ e $a = a \vee a$.*

Proof. Segue dalla riflessività della relazione $\leq$ e dai Lemmi 3.64 e 3.65. $\square$

Lemma 3.69. *Per ogni $a, b \in R$ abbiamo $a = a \vee (a \wedge b)$ e $a = a \vee (b \wedge a)$; dualmente, $a = a \wedge (a \vee b)$ e $a = a \wedge (b \vee a)$.*

Proof. Come sopra. $\square$

Lemma 3.70. *Per ogni $a, b, c \in R$ si ha $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$; dualmente, $(a \wedge b) \wedge c) = a \wedge (b \wedge c)$.*

Proof. Consiste nel dimostrare, applicando i Lemmi 3.64 e 3.65, le due disuguaglianze $(a \vee b) \vee c \leq a \vee (b \vee c)$ e $a \vee (b \vee c) \leq (a \vee b) \vee c$. $\square$

Proposizione 3.71. *Siano $a, a', b, b' \in R$ tali che $a = a'$ e $b = b'$. Allora $a \vee b = a' \vee b'$ e $a \wedge b = a' \wedge b'$.*

Proof. $a \leq a'$ e $b \leq b'$ danno $a \vee b \leq a' \vee b'$ e $a \wedge b \leq a' \wedge b'$ per il Lemma 3.66. Invertendo i ruoli, si ha pure $a' \vee b' \leq a \vee b$ e $a' \wedge b' \leq a \wedge b$, da cui la tesi. $\square$

Proposizione 3.72. *Siano $a, a' \in R$ con $a = a'$. Allora $\mu(a) = \mu(a')$.*

Proof. Immediata: $a = a'$ se e solo se $a \leq a'$ e $a' \leq a$. Ma $a \leq a'$ e $a' \leq a$ implicano $\mu(a) \leq \mu(a')$ e $\mu(a') \leq \mu(a)$, ossia $\mu(a) = \mu(a')$. $\square$

Corollario 3.73. *Siano $a, a', b, b' \in R$ tali che $a = a'$ e $b = b'$. Allora $d(a, b) = d(a', b')$.*

Proof. In virtù delle due precedenti proposizioni, si ha $d(a, b) = \mu(a \vee b) - \mu(a \wedge b) = \mu(a' \vee b') - \mu(a' \wedge b') = d(a', b')$. $\square$

Lemma 3.74. *Per ogni $a, b \in R$ vale $(a \vee b) \vee a = a \vee b$ e $(a \vee b) \vee b = a \vee b$; analogamente, $(a \wedge b) \wedge a = a \wedge b$ e $(a \wedge b) \wedge b = a \wedge b$.*

Proof. Come sopra. $\square$

Lemma 3.75. *$d(a, b) = d(a \vee b, a \wedge b)$.*

Proof. Risulta infatti $d(a, b) = \mu(a \vee b) - \mu(a \wedge b) = d(a \vee b, a \wedge b)$, in virtù del Lemma 3.63. $\square$

Lemma 3.76. *Per ogni $a, b, c \in R$ risulta $a \wedge b \leq a \wedge (b \vee c)$ e $a \wedge c \leq a \wedge (b \vee c)$; analogamente, $a \vee (b \wedge c) \leq a \vee b$ e $a \vee (b \wedge c) \leq a \vee c$.*

Proof. Per il Lemma 3.65 è $a \wedge b \leq a$; quindi, in virtù del Lemma 3.64 ci basta mostrare che $a \wedge b \leq b \vee c$. Ciò segue da $a \wedge b \leq b \leq b \vee c$. Il resto si verifica allo stesso modo. $\square$

Lemma 3.77. *Per ogni $a, b, c \in R$ si ha $d(a \vee b, a \vee c) + d(a \wedge b, a \wedge c) \leq d(b, c)$.*

Proof. Per definizione, $d(a \vee b, a \vee c) + d(a \wedge b, a \wedge c)$ è uguale a

$$\mu((a \vee b) \vee (a \vee c)) - \mu((a \vee b) \wedge (a \vee c)) + \mu((a \wedge b) \vee (a \wedge c)) - \mu((a \wedge b) \wedge (a \wedge c)).$$

Essendo, per il Lemma 3.76,

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c) \text{ e } a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c),$$

e così pure

$$(a \vee b) \vee (a \vee c) \leq a \vee (b \vee c) \text{ e } a \wedge (b \wedge c) \leq (a \wedge b) \wedge (a \wedge c),$$

la quantità sopra è maggiorata da

$$\begin{aligned}
&\mu(a \vee (b \vee c)) - \mu(a \vee (b \wedge c)) + \mu(a \wedge (b \vee c)) - \mu(a \wedge (b \wedge c)) = \\
&\mu(a \vee (b \vee c)) + \mu(a \wedge (b \vee c)) - (\mu(a \vee (b \wedge c)) + \mu(a \wedge (b \wedge c))) = \\
&\mu(a) + \mu(b \vee c) - (\mu(a) + \mu(b \wedge c)) = \mu(b \vee c) - \mu(b \wedge c) = d(b, c).
\end{aligned}$$

La dimostrazione è conclusa. $\square$

Riassumiamo. Siamo partiti da una struttura di reticolo (costruttivo) valutato $(R, \vee, \wedge, \mu)$ *priva di una relazione di uguaglianza interna*; abbiamo successivamente definito, sfruttando gli assiomi, una relazione di uguaglianza in R rispetto alla quale le operazioni interne $\vee, \wedge$ e la mappa μ a valori in $\mathbb{R}$ non solamente sono funzioni – nel senso matematico dalla parola –, ma rendono $(R, \vee, \wedge)$ un reticolo nel senso classico (si veda, ad esempio, il libro di Birkhoff [3]). Di più, abbiamo dedotto anche la necessaria "compatibilità" tra le operazioni $\vee, \wedge$ e la mappa d. Resta oramai soltanto la verifica che d è una semi-metrica: eccola.

Proposizione 3.78. *La mappa $d(\cdot,\cdot)$ è una semi-metrica in R.*

Proof. È banale constatare che $d(a,b) = d(b,a)$ e che $d(a,a) = 0$. Mostriamo quindi la disuguaglianza triangolare. Siano a, b, c arbitriamente scelti in R. Si ha, per il Lemma 3.75,

$$d(a,b) = d(a \vee b, a \wedge b) \leq d(a \vee b \vee c, a \vee b) + d(a \vee b, a \wedge b) + d(a \wedge b, a \wedge b \wedge c).$$

Si osservi che, per il Lemma 3.63, il secondo membro della disuguaglianza coincide con $d(a \vee b \vee c, a \wedge b \wedge c))$, a sua volta uguale a (si richiami il Lemma 3.77)

$$\begin{aligned}
&d(a \vee b \vee c, b \vee c) + d(b \vee c, b) + d(b, a \wedge b) + d(a \wedge b, a \wedge b \wedge c) \leq \\
&d(a \vee b, b) + d(b, a \wedge b) + d(b \vee c, b) + d(b, b \wedge c) = \\
&d(a \vee b, a \wedge b) + d(b \vee c, b \wedge c) = d(a,b) + d(b,c).
\end{aligned}$$

Ciò completa la dimostrazione. □

Chiudiamo la sezione raccogliendone i fatti salienti nel seguente teorema:

Teorema 3.79. *Sia $(R, \vee, \wedge, \mu)$ un reticolo valutato e sia d la semi-metrica "indotta" da μ. Allora $(R, \vee, \wedge, d)$ è un reticolo semi-metrico.*

3.6 Completamento di uno spazio semi-metrico

A beneficio del lettore, in questa sezione desideriamo delineare (in maniera estremamente concisa) la costruzione del completamento di uno spazio semi-metrico. Si tratta di una costruzione standard, per i dettagli della quale rinviamo ad un qualsiasi testo d'analisi matematica o di topologia generale.

Sia (R, d) uno spazio semi-metrico e sia C l'insieme delle successioni di Cauchy in (R, d). Un elemento di C è quindi una successione (a_n) in R con la proprietà che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\bar{n}$ (dipendente, naturalmente, dallo stesso ϵ) tale che per ogni $m, n \geq \bar{n}$ risulta $d(a_n, a_m) < \epsilon$. Da notare che R si "immerge" in modo canonico in C, mediante la mappa *iniettiva* $a \mapsto (a)_{n \in \mathbb{N}}$.

Ad ogni coppia di successioni (a_n) e (b_n) di Cauchy in R – cioè ad ogni coppia di elementi a, b in C –, possiamo associare il numero reale $d_C(a,b) := \lim d(a_n, b_n)$. La definizione è ben posta anche nel sistema dei numeri reali costruttivi, in quanto stiamo trattando successioni di Cauchy; successioni, cioè, per le quali abbiamo pieno controllo del tasso di convergenza. Si constata senza difficoltà che la mappa $d_C : C \times C \to \mathbb{R}$ è una semi-metrica in C che estende la semi-metrica d in R (quando si inietti R in C nel senso detto sopra); inoltre, R (o, più precisamente, la sua immagine iniettata) è denso in (C, d_C).

Resta da provare che lo spazio semi-metrico (C, d_C) è completo, ossia che ogni successione (a^n) di Cauchy in (C, d_C) ha un limite in C. La verifica non presenta difficoltà: ci limitiamo a costruire un "limite" $x \in C$, tralasciando la (piuttosto lunga) dimostrazione che $d_C(a^n, x) \to 0$.

In virtù della densità di R in C, ad ogni naturale k corrisponde un elemento $x_k \in R$ tale che $\lim_{n\to\infty} d(a_n^k, x_k) \leq \frac{1}{k+1}$. Ebbene, la successione $x := (x_k)$ rappresenta effettivamente un elemento di C (ossia è di Cauchy in (R, d)); non solo, $d_C(a^n, x) \to 0$, cioè x è un limite della successione (a^n) in (C, d_C).

4 L-spazi di Riesz

Come anticipato nella introduzione, il fondamentale teorema di Lebesgue viene trattato nei testi moderni di teoria della integrazione nell'ambito (elegante e generale insieme) della teoria degli spazi di Riesz. Presentiamo qui, in modo necessariamente stringato, la dimostrazione del teorema. L'idea è tratta da Fremlin [6],[7].

Per la definizione esatta di spazio di Riesz rinviamo ad un qualunque testo sull'argomento (per esempio, [6]).

Definizione 4.1. *Si definisce L-spazio (di Riesz) la coppia $(E, \|\cdot\|)$, ove E è uno spazio di Riesz e $\|\cdot\|$ è una norma su E, additiva in E^+, rispetto alla quale E è completo (i.e., completo rispetto alla metrica canonicamente indotta da $\|\cdot\|$).*

Passiamo ora alla formulazione ed alla dimostrazione del Lemma di Fatou. Ricordiamo che con il simbolo E^+ si intende il cono positivo di E, ovverosia $E^+ := \{x \in E : x \geq 0\}$.

Teorema 4.2. *Sia E un L-spazio e sia (x_n) una successione limitata (nel senso dell'ordine) in E^+. Allora* $\liminf x_n$ *esiste in E e risulta* $\|\liminf x_n\| \leq \liminf \|x_n\|$.

Proof. Ricordiamo che, per definizione, si pone $\liminf x_n := \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{i\geq n} x_i$. La limitatezza della successione (x_n) comporta che $x := \liminf x_n$ esiste come elemento di E (si utilizza qui il fatto che E, in quanto L-spazio, è in particolare *Dedekind σ-completo*). Sfruttando poi la *order-continuity* della norma $\|\cdot\|$ (ulteriore conseguenza delle ipotesi su E), segue

$$\|x\| = \|\sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{i\geq n} x_i\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\inf_{i\geq n} x_i\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{i\geq n} \|x_i\| = \liminf \|x_n\|,$$

cioè la tesi (torna forse utile notare che nella formula sopra si è usato il fatto ovvio: per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $j \geq n$, risulta $\|\inf_{i \geq n} x_i\| \leq \|x_n\|$ in virtù della monotonia in E^+ della norma $\|\cdot\|$). $\square$

Il teorema di Lebesgue deriva immediatamente dal lemma di Fatou, ora. Prima di enunciarlo ricordiamo che, dato $x \in E$, si pongono

$$x^+ := \sup\{x, 0\}; \qquad x^- := \sup\{-x, 0\} = -\inf\{x, 0\}; \qquad |x| := x^+ + x^-.$$

Teorema 4.3 (della Convergenza Dominata). *Sia E un L-spazio e sia (x_n) una successione limitata (nel senso dell'ordine) in E tale che esista, in E, $x := \lim x_n$. Allora* $\lim \|x_n\| = \|x\|$.

Proof. Per ipotesi, $x = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{i \geq n} x_i = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{i \geq n} x_i$. Risultano quindi

$$x^+ = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{i \geq n} x_i^+ = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{i \geq n} x_i^+; \qquad x^- = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{i \geq n} x_i^- = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{i \geq n} x_i^-.$$

La limitatezza di (x_n) implica che entrambe le successioni (x_n^+) e (x_n^-) sono limitate. Poiché per ogni $x \in E$ vale

$$\|x\| = \||x|\| = \|x^+ + x^-\| = \|x^+\| + \|x^-\|$$

in quanto E è supposto essere un L-spazio, possiamo limitarci alla verifica che $\|\lim x_n^+\| = \lim \|x_n^+\|$. Per il Lemma di Fatou abbiamo

$$\|x^+\| = \|\sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{i \geq n} x_i^+\| \leq \liminf \|x_n^+\|;$$

d'altro canto, applicando a "rovescio" lo stesso Lemma di Fatou abbiamo pure

$$\|x^+\| = \|\inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{i \geq n} x_i^+\| \geq \limsup \|x_n^+\|.$$

Evidentemente, ciò comporta $\lim \|x_n^+\| = \|x^+\| = \|\lim x_n^+\|$, quanto si voleva dimostrare. $\square$

References

[1] Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., *Locally Solid Riesz Spaces with Applications to Economics,* American Mathematical Society, Providence, 2003.

[2] Bartle, R.G., *The Elements of Integration,* Wiley, New York, 1965.

[3] Birkhoff G., *Lattice Theory,* American Mathematical Society, Providence, 1967.

[4] Bishop E., Bridges D., *Constructive Analysis,* Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[5] Ciaffaglione A., Di Gianantonio P., *A tour with constructive real numbers,* in "Proceedings of the Workshop: Types for Proofs and Programs", LNCS 2277, 41–52.

[6] Fremlin, D.H., *Topological Riesz Spaces and Measure Theory,* Cambridge University Press, London, 1974.

[7] Fremlin, D.H, *Measure Theory. Volume III,* disponibile presso il sito: www.essex.ac.uk/maths/staff/fremlin.

[8] Luxemburg, W.A.J., Zaanen, A.C., *Riesz Spaces I,* North-Holland, Amsterdam, 1971.

[9] Spitters, B., *Constructive algebraic integration theory,* Ann. Pure Appl. Logic 137 (2006), 380–390.

[10] Weber, H., *Uniform lattices I. A generalization of topological Riesz spaces and topological Boolean rings,* Ann. Mat. Pura Appl. 160 (1991), 347–370.

[11] Weber, H., *Uniform lattices II. Order continuity and exhaustivity,* Ann. Mat. Pura Appl. 165 (1993), 133–158.